Hernán Ariel Steinbrun.

INTRODUCCIÓN.

El Objeto del Cálculo Financiero.

El Cálculo Financiero es una disciplina científica cuyos objetivos son, en términos generales, describir y analizar las operaciones financieras y consecuentemente determinar y evaluar los resultados obtenidos. El elemento distintivo de estas operaciones es el rol central que en ellas juega el capital financiero que junto con el capital productivo y el capital humano configuran las distintas formas que reviste el capital como categoría económica.

Si se efectúa un análisis sencillo las distinciones entre los tres tipos de capital son más o menos claras: el volumen diario negociado en nuestra bolsa de valores, expresado en pesos o dólares, es un ejemplo de capital financiero; las máquinas y herramientas que posee una empresa es un ejemplo de capital productivo y el equipo de investigación con que cuenta un laboratorio es un ejemplo de capital humano. Sin embargo, en la medida que se profundiza el análisis los límites son menos nítidos y no parece adecuado establecer definiciones precisas. Por ejemplo, una inversión destinada a adquirir máquinas puede ser vista como una inversión productiva pero si se considera la conveniencia de comprar o alquilar el material, esta temática constituye el eje de una discusión financiera.

La contratación de profesores por parte de una empresa para dictar cursos de computación representa una inversión en capital humano, pero si se consideran otras facetas de esa acción, la óptica es distinta: el pago a los profesores puede ser un problema financiero y la utilización ulterior de las computadoras puede mejorar la capacidad productiva de la empresa.

Estos ejemplos tienden a mostrar que diferentes enfoques de una misma acción económica pueden conducir a apreciaciones distintas sobre la forma predominante del capital que la origina ; sin embargo un hecho común a todo lo que puede denominarse capital financiero, es que, por lo general, está representado por una masa de dinero o bien por derechos u obligaciones a percibir o a abonar sumas de dinero en diferentes momentos. Una de las características salientes del capital financiero es su alto grado de liquidez y su divisibilidad que es más dificultosa o bien imposible en las otras formas de capital. El Cálculo Financiero, entonces, procura describir, analizar y evaluar las operaciones en las que interviene el capital financiero.

Estas apreciaciones son suficientemente vagas y debido a ello sólo tenemos nociones de carácter general de lo que constituye el capital financiero y por ende, el cálculo asociado a él carece de límites claros y nítidos, aun cuando hay un convencimiento general acerca de los grandes temas que incluye, buena parte de los cuales desarrollamos en este trabajo.

Estos motivos hacen que no sea nuestra pretensión, ni establecer ni adoptar ninguna definición
precisa del objeto del Cálculo Financiero , sino que consideramos al capital financiero como un
dato del problema, un elemento preexistente al cual dirigiremos nuestra atención para elucidar su evolución en el tiempo y analizar los resultados que se pueden obtener en el caso que se planteen una inversión o distintas inversiones alternativas del mismo.

Clasificación de las operaciones financieras. Elementos ciertos y aleatorios.

Las operaciones financieras pueden ser clasificadas de muchas maneras distintas, pero un aspecto que conviene tener en cuenta al iniciar nuestro estudio, es saber si esas operaciones incluyen sólo datos o elementos que se conocen con certeza o bien, además, si incluyen elementos aleatorios, es decir fortuitos o contingentes, relacionados con alguna distribución de probabilidad.

Como esta disciplina se desenvuelve en el mundo económico real que implica el transcurso del tiempo, esto significa que las inversiones de hoy recién darán sus frutos en un futuro que puede ser más o menos próximo o más o menos lejano. Nadie puede asegurar qué es lo que sucederá el día de mañana y considerando este punto de vista, al menos teóricamente, todas las operaciones financieras se desarrollan en un contexto de incertidumbre.

Sin embargo, hay acontecimientos que resultan sumamente previsibles: ¿quién dudaría que el Banco XX no abonará a su vencimiento el depósito efectuado 30 días atrás? Si los agentes económicos no creyeran en este proceder se dificultaría terriblemente la práctica financiera por la falta de credibilidad en el mismo sistema económico. Por supuesto, la práctica económica, las leyes, las normas, el sistema de instituciones, tiende a aventar estos pensamientos y como resultado de ello hay un conjunto de operaciones financieras que se consideran de naturaleza cierta, en las que se supone que sus resultados son perfectamente previsibles. Se las suele denominar operaciones financieras ciertas y como ejemplos se pueden citar a los depósitos bancarios, el descuento de documentos, las operaciones de préstamo, etc.

En ellas se suponen conocidos todos los elementos que intervienen en la operación, es decir, este contexto no incluye factores de incertidumbre y, por consiguiente, para efectuar el análisis, no se requiere el uso del cálculo de probabilidades; la tasa de interés será el instrumento esencial para hacer la valuación.

En cambio, en otros casos, como en las operaciones de seguros, no sólo intervienen elementos ciertos en la configuración de las operaciones, sino que además, existen elementos aleatorios que no son conocidos de antemano: cuando uno contrata un seguro contra incendio no sabe si habrá oblado de balde la prima o bien si ocurrirá

un siniestro en algún momento de vigencia del contrato. Estas operaciones, relacionadas con los seguros, se denominan actuariales y para la determinación de resultados se requiere no solo el empleo de la tasa de interés sino también utilizar herramientas que provienen del campo de la Estadística y del Cálculo de Probabilidades.

Existen además otras operaciones de índole financiera aleatoria distintas de las operaciones de seguros. Por ejemplo, puedo adquirir una acción porque creo que en los próximos meses experimentará una fuerte valorización, pero los resultados de mi inversión están rodeados de incertidumbre y, como en el caso precedente, para poder estimarlos, debo recurrir tanto al empleo de la tasa de interés como al cálculo de probabilidades. Estas operaciones que genéricamente denominamos financieras aleatorias se han multiplicado con gran velocidad en los últimos años y a este grupo pertenecen, para citar algunas a modo de ejemplo, las opciones y los futuros.

Otra distinción que conviene formular, es si se trata de operaciones de pago único o múltiple para considerarlas en forma separada con propósitos didácticos.

Las operaciones de pago único consisten de un desembolso inicial seguido de un cobro ulterior, si se trata de una inversión, o bien de un cobro inicial seguido de un desembolso ulterior si se trata de una financiación.

En las operaciones de pago múltiple, según se trate de inversiones o de financiaciones, el desembolso o el cobro inicial es seguido por un flujo ulterior de fondos constituido por más de un pago.

Por ejemplo: una operación de préstamo en la que el deudor recibe hoy una suma de dinero para devolver otra (que incluye los intereses) al cabo de un cierto tiempo, constituye una operación de pago único; en cambio si la devolución del préstamo se efectúa en dos o más cuotas consideraremos que se trata de una operación de pagos múltiples.

Otra distinción que conviene tener en cuenta es entre depósitos y préstamos. Si los depósitos se analizan desde el punto de vista del depositante, se caracterizan por un desembolso inicial o un conjunto de desembolsos iniciales que aquel efectúa en una entidad autorizada a captar depósitos, para luego percibir, al vencimiento de la operación, el capital junto con los intereses. Los depósitos, desde este punto de vista, pueden ser incluidos dentro de las inversiones y representan activos para el depositante.

En los préstamos, en cambio, el deudor recibe una suma de dinero al comienzo de la operación y luego deberá devolver el capital más los intereses ya sea de una sola vez o en múltiples pagos. Los préstamos, analizados desde el punto de vista del deudor constituyen una financiación y el monto de los préstamos se incluyen en el pasivo de los prestatarios.

Si ahora consideramos a las contrapartes de esas operaciones los términos se invierten: un depósito figura en el pasivo de una entidad financiera y, en cambio, el monto de un préstamo otorgado forma parte del activo de esta.

También se suele denominar a las operaciones de depósito y de préstamo como pasivas y activas respectivamente. Esta clasificación se efectúa atendiendo a la posición que ocupan estas operaciones a ambos lados del balance de las entidades financieras: los depósitos son operaciones pasivas de las entidades y los préstamos representan operaciones activas.

CAPÍTULO 1. EL SISTEMA FINANCIERO ARGENTINO.

El mercado financiero puede dividirse en dos partes: el denominado mercado del dinero y el denominado mercado de capitales. El mercado del dinero está representado por el sistema bancario o financiero y se caracteriza por la intermediación entre la oferta y la demanda de dinero. En este mercado se negocian activos altamente líquidos y, comparativamente, de bajo riesgo tales como los depósitos, los préstamos y las tasas de interés. El sistema financiero argentino, en lo que al mercado del dinero se refiere, está regulado por la Ley Número 21.526, denominada Ley de Entidades Financieras. Las instituciones del mercado monetario son los bancos, las compañías financieras, las cajas de crédito, etc., que están controladas por el Banco Central de la República Argentina.

El mercado de capitales se caracteriza por la emisión, negociación e intermediación de activos que son menos líquidos y de mayor riesgo que los intercambiados en el mercado monetario. En este mercado se negocian básicamente acciones, bonos y derivados tales como futuros, opciones, etc. (Algunas operaciones reciben el nombre de derivados porque su valor depende de otro activo denominado, por lo general, subyacente).

Las principales instituciones del mercado de capitales son las bolsas de comercio que cuentan con mercados de valores donde operan los agentes bursátiles (los agentes y las sociedades de bolsa) y los extrabursátiles (agentes del mercado abierto). La Comisión Nacional de Valores controla y regula la actividad de la oferta y la demanda pública de valores mobiliarios. Es una entidad autárquica que depende del Ministerio de Economía.

Ambos mercados están intímamente relacionados y las entidades financieras, en especial los bancos comerciales (facultados por el artículo 21 de la Ley de Entidades Financieras) pueden participar del mercado de capitales, actuando en el mercado abierto electrónico (MAE) o como agentes de bolsa.

Nosotros nos ocuparemos en primer término del mercado del dinero pero queremos señalar que existen otras instituciones que poseen objetivos específicos, las que si bien no forman parte ni del mercado monetario ni del mercado de capitales efectúan múltiples e importantes transacciones financieras que se canalizan a través de esos mercados y cuyos negocios pueden causar fuerte impacto en ellos. Nos referimos a las administradoras de fondos de jubilaciones y pensiones, a las compañías de seguros y a las aseguradoras de riesgos del trabajo, instituciones que también consideraremos en nuestro análisis.

Por último, dedicaremos alguna atención a los Fondos Comunes de Inversión, instituciones que pertenecen al mercado de capitales y que son utilizadas por muchos inversores como sucedáneos de las instituciones financieras relacionadas con el mercado monetario. Esto se debe a que merced a la diversificación de las carteras que efectúan estas instituciones, los inversores se exponen a un riesgo menor que si efectúan operaciones individuales en los mercados de valores y gozan de una liquidez comparativamente mayor que la que existe en esos mercados. Por otra parte, las inversiones en los Fondos Comunes de Inversión ofrecen, en general, una expectativa de mayor rentabilidad, aunque con mayor riesgo que las inversiones en el mercado monetario.

1. 1.<u>El mercado del dinero o el sistema financiero.</u>

El artículo 1º la Ley 21.526 señala que:

“Quedan comprendidas en esta ley y en sus normas reglamentarias las personas o entidades privadas o públicas –oficiales o mixtas- de la Nación, de las provincias o municipalidades que realicen intermediación habitual entre la oferta y la demanda de recursos financieros.”

El artículo 2º señala además que quedan expresamente comprendidas en sus disposiciones los siguientes tipos de entidades: Bancos Comerciales, Bancos de Inversión, Bancos Hipotecarios, Compañías Financieras, Sociedades de Ahorro y Préstamo para la Vivienda u otros Inmuebles y Cajas de Crédito.

La intermediación habitual entre la oferta y la demanda de recursos financieros se refiere básicamente a los depósitos y los préstamos. En el Apéndice a este capítulo presentamos algunas operaciones típicas.

La autoridad que tiene a su cargo la aplicación de la Ley de Entidades Financieras es el Banco Central de la República Argentina (B.C.R.A) y sus

facultades le son acordadas por su Carta Orgánica (Ley 24.144. Sancionada el 23.9.92 y modificada en enero de 2002). La Carta Orgánica de una institución es el cuerpo legal que establece su naturaleza y objeto, regula su actividad, sus derechos y obligaciones, es decir rige la vida de esa institución.

Para cumplir sus funciones el Banco Central dictará normas reglamentarias y ejercerá la fiscalización de las entidades que se encuentren bajo su órbita.

La intervención de cualquier otra autoridad según la Ley 21.526 queda limitada a los aspectos que no tengan relación con las disposiciones de esta Ley.

Al respecto el Art. 6º establece lo siguiente:
" Las autoridades de control en razón de la forma societaria sean nacionales o provinciales, limitarán sus funciones a los aspectos vinculados con la constitución de la sociedad y a la vigilancia del cumplimiento de las disposiciones legales, reglamentarias y estatutarias pertinentes."

Los distintos tipos de entidades tienen autoridades de control específicas que regulan distintos aspectos de la vida de la sociedad. En el cuadro siguiente se incluyen algunos organismos de control para distintos tipos de entidades
:

Organismo de contralor	***Entidades controladas***
Inspección General de Justicia	Sociedades (nacionales y extranjeras), excepto aseguradoras y financieras. Fundaciones Asociaciones Civiles Uniones Transitorias de Empresas

Comisión Nacional de Valores	Entidades que hacen oferta pública de sus títulos valores (acciones u obligaciones negociables).
Instituto Nacional de Acción Cooperativa	Cooperativas
Instituto Nacional de Acción Mutual	Mutuales
Instituto Nacional de Obras Sociales	Obras Sociales
Superintendencia de Seguros de la Nación	Entidades aseguradoras en general Entidades de seguros de retiro
Superintendencia de Riesgos	Aseguradoras de Riesgo de Trabajo

de Trabajo

Superintendencia de Administradoras de Fondos de Jubilaciones y Pensiones	Administradoras de Fondos de Jubilaciones y Pensiones
Banco Central de la República Argentina	Bancos y Entidades Financieras

Las entidades comprendidas en la Ley 21.526 no podrán iniciar sus actividades sin previa autorización del Banco Central, así como también la fusión o transmisión de fondos de comercio requerirá su autorización. Para entender la importancia de las funciones de desarrolladas por el Banco Central señalemos que el producto bruto interno de la Argentina es del orden de los 280 mil millones de dólares y que los depósitos de las entidades financieras, antes de la debacle financiera del año 2001 eran de alrededor de 85 mil millones de dólares y una suma análoga a los depósitos correspondían a los préstamos de las entidades financieras.

En cuanto a las formas societarias, las entidades financieras de la Nación, Provincias y las Municipalidades se constituirán según establezcan sus cartas orgánicas.

El resto de las entidades deberá hacerlo bajo la forma de sociedad anónima, excepto: a) las sucursales de entidades extranjeras, que deberán tener en el país una representación con poderes suficientes de acuerdo con la ley argentina; b)los bancos comerciales, que también podrán constituirse en forma de sociedad cooperativa; c) las cajas de crédito que también podrán constituirse en forma de sociedad cooperativa o asociación civil.

CAPÍTULO 2. ELEMENTOS BÁSICOS DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS DE PAGO ÚNICO.

2.1. El proceso de capitalización: Capital, Interés, Valor final.

El proceso de capitalización consiste en la transformación de un Capital Inicial, C_0 , en un Valor Final, que al cabo de un período de capitalización, podemos individualizar como C_1.

Si, en cambio, consideramos genéricamente n períodos de capitalización donde n es un número entero positivo (n = 1,2,3,...) escribiremos C_n para representar al valor final.

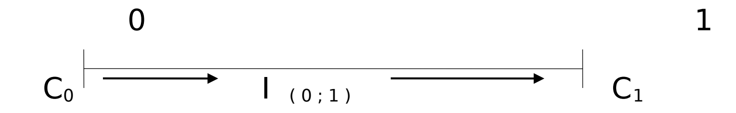
La diferencia entre el Capital Inicial y el Capital o Valor Final, es el interés.

Si consideramos un solo período resulta:

$$C_1 - C_0 = I_{(0;1)}$$

El Capital es denotado por un solo subíndice, pues en la práctica económico-financiera corresponde a un momento, es una variable que los economistas denominan “stock”, en cambio la masa de intereses es denotada mediante dos símbolos, pues corresponde a un período, en este caso el período (0; 1). En términos económicos se trata de una variable “flujo”. El capital “existe” en un momento, el interés se “genera” en el transcurso del tiempo.

El gráfico siguiente ilustra lo expuesto.



La fórmula: $I_{(0;1)} = C_1 - C_0$

significa que el monto de intereses que corresponde al período (0,1) es la diferencia entre el capital final, C_1 y el capital inicial, C_0 . En general, si se trata de operaciones de pago único, el interés es la diferencia entre el valor final y el capital inicial y esta definición constituye una fórmula operativa.

Si se consideran n períodos de capitalización, la fórmula anterior se transforma en:

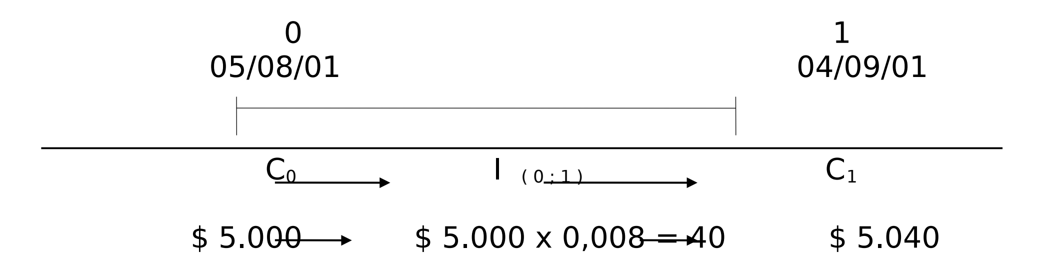
$$I_{(0;n)} = C_n - C_0$$

El interés es producido por la aplicación de dos elementos al capital inicial; el tiempo y la tasa de interés. Aquél será denotado mediante la letra “n” y la

tasa de interés, que se consignará en tanto por uno, será denotado mediante la letra “i”.

La tasa de interés expresa el tanto o suma a entregar por unidad de capital, por los servicios que este presta. El interés puede ser considerado como el precio que hay abonar por el uso del capital y la tasa de interés representa entonces el precio que debe abonarse por el uso de una unidad de capital.

Ejemplo. 1. 1. El 05/08 /2001 deposito $ 5.000 a 30 días de plazo. Si la tasa de interés es el 0.8% mensual ¿Cuál es el valor final al cabo de ese mes?



Deben notarse varias cosas en este ejemplo sencillo:

1ero) El interés se calculó aplicando tanto la tasa de interés como el “tiempo” al capital inicial. En este caso el tiempo es un período de un mes, esto es n = 1 y por ello no se registró en la fórmula de cálculo de los intereses.

2do) La sencillez del cálculo también fue producto del hecho de consignar unidades similares para el “tiempo” y la tasa de interés. El tiempo representaba un mes y la tasa fue expresada como tanto mensual. La concordancia entre las unidades en que se expresan las tasas de interés y los períodos de capitalización es básica para el cálculo de intereses: si el período de capitalización es un semestre, la tasa de interés debe ser semestral; si el período es un año, la tasa debe ser anual y así siguiendo.

3ero) El período puede ser caracterizado mediante fechas (05/08/96; 04/09/96) o convencionalmente mediante la numeración natural, en este caso (0; 1), o inclusive se

pueden utilizar los días como unidad; aquí : (0 ; 30).

4to) La finalización del período, 04/09/01, se calculó atendiendo a nuestras leyes. Nuestro Código Civil en el Título II. Del Modo de contar los intervalos de derecho, establece la forma de contar los plazos y resulta ilustrativo conocer este mecanismo, motivo por el cual en el punto siguiente se transcribirán los artículos respectivos.

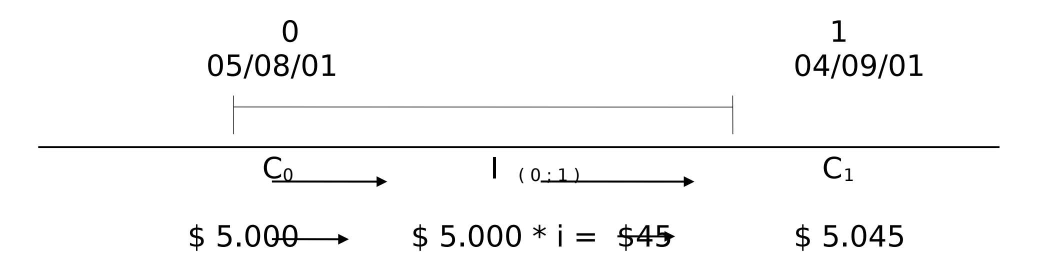
5to) En la actividad financiera cotidiana la tasa de interés se expresa en tanto por ciento. Así 0,8% equivale a 0,8/100 = 0,008. Para hacer los cálculos conviene expresar la tasa en tanto por uno, porque esto se traduce en una mayor sencillez y menor posibilidad de error.

6to) El proceso de Capitalización que hemos descripto reconoce dos sumas de dinero: el capital inicial y los intereses generados en la operación. El agregado de ambos constituye el capital final.
En tanto que el capital inicial representa la suma puesta a disposición de alguien para su uso, el interés es considerado como el precio que hay que abonar para usufructuar el capital; es decir, el interés es un precio que corresponde a los servicios que presta el capital.

7mo) Se señaló que en la práctica económico-financiera habitual el capital "existe" en un momento determinado y el interés se "genera" durante el período. Esto es así porque el capital final (capital más los intereses) no pueden disponerse en cualquier momento, sino al vencimiento de la operación; si el capital estuviera disponible siempre, habría una continuidad en su flujo en cuyo caso cabría considerarlo como una magnitud continua. De hecho así lo haremos al considerar la denominada "Teoría Matemática del Interés".

Presentamos seguidamente un nuevo ejemplo para analizar más detenidamente el proceso de generación de los intereses o proceso de capitalización.

Ejemplo 1.2. El 05/08 /2001 deposito $ 5.000 a 30 días de plazo. Si al vencimiento recibo $ 5.045 ¿Cuál es el valor de la tasa de interés?



Los intereses ascienden a $ 45 ya que pueden obtenerse como la diferencia entre el capital final y el inicial. Es inmediato que la tasa de interés, que es el interés por unidad de capital resulta de dividir $ 45 por $5000, es decir: i = 45 / 5000 = 0,009 ó 0,9% para el plazo de 30 días. El símbolo * denota la operación aritmética de multiplicación o producto.
Esta forma de calcular la tasa de interés que es válida para cualquier operación de pago único y que puede expresarse como la masa de intereses divididos por el capital inicial,

representa la tasa abonada en la operación y se determina a partir de los datos contenidos en la misma.

El valor final puede ser calculado mediante:

$$C_1 = C_0 + I_{(0;1)}$$

y representa al valor final del primer período como el capital inicial más los intereses. Si expresamos los intereses en función de la tasa de interés como: $I_{(0;1)} = C_0 * i$, resultará:

$$C_1 = C_0 + C_0 * i = C_0 (1 + i)$$

Hacemos notar que en esta segunda fórmula el valor al finalizar el primer período puede representarse como el producto de un capital inicial multiplicado por un factor de capitalización. Más adelante veremos que estas fórmulas revisten carácter general.

2.2. <u>Cómo medir los intervalos entre dos fechas.</u>

El vencimiento de la operación que incluimos como ejemplo 1.1, el 04/09/01, se calculó atendiendo a nuestras leyes. Nuestro Código Civil en el Título II. Del Modo de contar los intervalos de derecho, establece la forma de contar los plazos y resulta ilustrativo conocer este mecanismo, motivo por el cual a continuación transcribimos los artículos respectivos

"Art. 23. Los días, meses y años se contarán para todos los efectos legales por el Calendario Gregoriano.

Art. 24. El día es el intervalo entero que corre de media noche a media noche; y los plazos de días no se contarán de momento a momento, ni por horas, sino desde la media noche en que termina el día de su fecha.

Art. 25. Los plazos de mes o meses, de año o años, terminarán el día que los respectivos meses tengan el mismo número de días de su fecha. Así, un plazo que principie el 15 de un mes, terminará el 15 del mes correspondiente, cualquiera que sea el número de días que tengan los meses o el año.

Art. 26. Si el mes en que ha de principiar un plazo de meses o años, constare de más días que el mes en que ha de terminar el plazo, y si el plazo corriese desde alguno de los días en que el primero de dichos meses excede al segundo, el último día del plazo será el último día de este segundo mes.

Art. 28. En los plazos que señalasen las leyes o los tribunales, o los decretos del Gobierno, se comprenderán los días feriados, a menos que el plazo señalado sea de días útiles, expresándose así.

Art. 29. Las disposiciones de los artículos anteriores, serán aplicables a todos los plazos

señalados por las leyes, por los jueces, o por las partes en los actos jurídicos, siempre que en las leyes o en esos actos no se disponga de otro modo."

El Banco Central de la República Argentina en su carácter de Ente Rector del Sistema Financiero está obligado a aplicar estas disposiciones legales y a controlar su aplicación en las Entidades que integran el sistema. En las Normas relativas al cálculo de intereses dictadas por el Banco Central se establece de una manera sencilla la forma de contar los días: ... "se contará el día de la imposición y no el del vencimiento".

Esta norma se justifica porque desde el momento que la entidad financiera recibe los fondos está en condiciones de disponer de ellos, por ejemplo prestándolos. Esto no sucede el día del vencimiento ya que desde el inicio de las operaciones los capitales están a disposición de los clientes.

En nuestro ejemplo 1.1 siguiendo este criterio, desde el 5 de agosto al 31 de agosto hay 27 días y desde el 1 de septiembre al 4 de septiembre (si este día no se cuenta por ser el de retiro) hay 3 días. Por consiguiente, el depósito estuvo inmovilizado o depositado durante 30 días. Desde un punto de vista práctico hay que contar el día de la imposición y no el del retiro del depósito.

Como regla, en los meses de 30 días para agregar 30 días a una fecha; el número que corresponde al día no varía y se agrega un mes. Por ejemplo, si se agregan 30 días al 4 de septiembre, uno se ubica en el 4 de octubre, en los meses de 31 días, se resta un día al número original y se agrega un mes: si se agregan 30 días al 4 de octubre uno se ubica en el 3 de noviembre.

Un depósito a 30 días de plazo efectuado el 5 de octubre vence el 4 de noviembre, ya que del 5 al 31 de octubre el capital está depositado durante 27 días y desde el 1 de noviembre hasta el 4 de noviembre hay 3 días, ya que el 4 de noviembre no se cuenta por ser el día del vencimiento.

2.3. <u>Ejercicios.</u>

1. Calcular: a) el número de días que media entre el primero y el segundo vencimiento de la factura cuyos datos son:

Primer vencimiento: 21/05/01 Segundo vencimiento:29/08/01

Mayo: 11; Junio: 30; Julio: 31; Agosto: 28. Total: 100 días. El 29 de agosto no se incluye.

2. ¿Cuál es la fecha de vencimiento de un préstamo de $ 10.000 efectuado el 12 de julio de 1999, convenido a tres meses de plazo? Sugerencia: remitirse al artículo 25 del Código Civil transcripto más arriba.

Respuesta: 12 de octubre de 1999.

3. ¿Cuál es la fecha de vencimiento de un préstamo de $ 10.000 efectuado el 12 de julio de 1999, convenido a 90 días de plazo? Sugerencia: cuente los días a partir de la fecha de imposición, incluida esta, no cuente el día de vencimiento.

Respuesta: El 10 de octubre de 1999. Porque corresponde contar 20 días en julio, 31 en agosto, 30 en setiembre y 9 en octubre para completar 90 días. Así que el préstamo vence el 10 de octubre porque este día no se incluye en el cálculo.

4.¿Cuál es la fecha de vencimiento de un préstamo de $ 10.000 efectuado el 31 de mayo de 1999, convenido a 18 meses de plazo? Sugerencia: remitirse al artículo 26 del Código Civil.

Respuesta: Como el vencimiento ocurre en noviembre de 2000 y este mes tiene 30 días, en consonancia con el artículo mencionado el vencimiento ocurrirá el 30 de noviembre de 2000.

5. Una persona solicita un préstamo de $ 2.500 por un día de plazo. La entidad le acredita los fondos el 21 de noviembre de 2001 a las 12 horas y el acreedor los devuelve el mismo 21 de noviembre a las 14 horas y 40 minutos. Es válida la pretensión del deudor de que le cobren intereses solo por medio día porque el dinero estuvo prestado menos de un día?

Respuesta: no. La pretensión del deudor contradice el artículo 24 del Código Civil.

6. En los plazos a que se refieren las leyes o decretos del Gobierno deberán incluirse los días feriados o solo deberán contarse los días hábiles?

Respuesta: Deberán incluirse. Para que los días feriados no sean incluidos deberá especificarse que los plazos a que hace mención la respectiva Ley o el decreto solo se refieren a días hábiles.

CAPÍTULO 3. REGÍMENES DE CAPITALIZACIÓN. EL RÉGIMEN DE INTERÉS SIMPLE.

Hemos visto que capitalizar implica agregar intereses al capital inicial para constituir un valor final. Como el elemento dinámico de esta relación lo constituyen los intereses cobra importancia el mecanismo generador de los mismos; así que cuando hablamos de regímenes de capitalización básicamente nos estamos refiriendo a la manera en que son calculados los intereses para formar los valores finales.

Desde un punto de vista teórico uno puede imaginar diversos regímenes de capitalización y de hecho la nómina resultante sería infinita, pero la práctica económico-financiera hizo que sólo dos regímenes perduraran con nombre propio: a) el régimen o sistema de interés simple y b) el régimen o sistema de interés compuesto. Nos referiremos seguidamente a cada uno de ellos, comenzaremos por el interés simple y en el capítulo siguiente analizaremos el interés compuesto.

3.1. El régimen de interés simple

La característica esencial del régimen interés simple es que sólo el capital inicial produce intereses.

Para visualizar cómo se produce el proceso de capitalización en el interés simple se presentará un ejemplo sencillo. Supongamos un depósito de $ 1.000 que es efectuado el 05/04/96 a 30 días de plazo, siendo la tasa de interés el 0,8% mensual. La operación es renovada a la misma tasa dos veces más, retirándose en cada caso los intereses.

El resultado puede ser obtenido utilizando distintas formas de presentación para determinar las fórmulas respectivas.

a) El interés del primer período es:

$$I_{(0;1)} = \$\ 1.000 \times 0,008 = \$\ 8$$

Como solamente el capital inicial produce interés, los intereses correspondientes a los otros dos períodos serán:

$$I_{(1;2)} = \$\ 1.000 \times 0,008 = \$\ 8$$

$$I_{(2;3)} = \$\ 1.000 \times 0,008 = \$\ 8$$

En total, se habrán producido $ 24 de intereses y el capital final ascenderá a:

$$C_3 = \$\ 1.000 + \$\ 24 = \$\ 1.024$$

En el gráfico se esquematiza el resultado:

05/04/96	05/05/96	04/06/96	04/07/96
0	30	60	90
0	1	2	3

$C_0 \rightarrow I_{(0;1)} \rightarrow C_1 \rightarrow I_{(1;2)} \rightarrow C_2 \rightarrow I_{(2;3)} \rightarrow C_3$

$1.000 → $8 → $1.008

→ $8 → $1.016

→ $8 → $1.024

Si utilizamos los símbolos que hemos establecido, se verifica que:

$$I_{(0;1)} = I_{(1;2)} = I_{(2;3)} = \$8$$

Como:

$$I_{(0;1)} = C_0 \ .\ i = \$1.000\ .\ 0,008 = \$8$$

Resulta:

$$I_{(0;3)} = 3\ .\ I_{(0;1)} = 3\ .\ C_0\ .\ i = 3\ .\ \$8 = \$24$$

y dado que:

$$C_3 = C_0 + I_{(0;3)}$$

se tiene que:

$$C_3 = C_0 + 3 \cdot C_0 \cdot i = C_0 (1 + 3i)$$

si sacamos factor común C_0.

b) Un razonamiento parecido al anterior y basado en el hecho que el interés es proporcional al tiempo (porque la tasa se aplica al mismo capital) conduce a que:

$I_{(0;3)} = 3 \cdot I_{(0;1)}$ y como $I_{(0;1)} = C_0 \cdot i$, resulta: $I (0;3) = 3 \cdot C_0 \cdot i$

$$\text{y} \quad C_3 = C_0 + 3 \cdot C_0 \cdot i = C_0 (1 + 3i)$$

c) Se puede utilizar un cuadro para detallar la forma en que se generan los intereses.

Fecha	**Concepto**	**Importe**	**Fórmula**
05/04/96	Depósito	$ 1000	C_0
05/05/96	Interés	$1.000 . 0,008 = $8	$I_{(0;1)} = C_0 \cdot i$
05/05/96	Valor Final	$1.000 + 8 = $1.008	$C_1 = C_0 + I_{(0;1)} = C_0 + C_0 \cdot i = C_0 (1+i)$
04/06/96	Interés	$1.000 . 0,008 = $8	$I_{(1;2)} = C_0 \cdot i$
04/06/96	Valor Final	$1.000 +16 = $1.016	$C_2 = C_0 + 2 \cdot I_{(0;1)} = C_0 + 2 C_0 \cdot i = C_0 (1+2i)$
04/07/96	Interés	$1.000 . 0,008 = $8	$I_{(2;3)} = C_0 \cdot i$
04/07/96	Valor Final	$1.000 +24 = $1.024	$C_3 = C_0 + 3 \cdot I_{(0;1)} = C_0 + 3 C_0 \cdot i = C_0 (1+3i)$

3.2. Generalización de la fórmula del interés simple

El razonamiento anterior se puede extender fácilmente a cualquier número de períodos basándonos en que en el interés simple sólo el capital inicial genera intereses y en que el valor final es igual al capital inicial más los intereses.

Supongamos que la relación $C_3 = C_0 + 3 \cdot C_0 \cdot i$, sigue siendo válida en el período (n-1)

Esto es: $C_{(n-1)} = C_0 + (n-1) \cdot C_0 \cdot I$

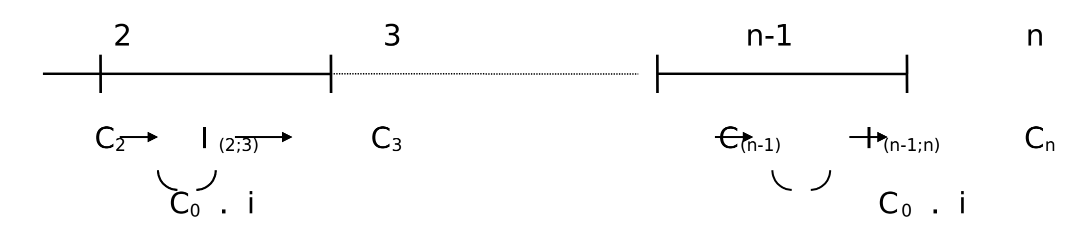
Si a esta igualdad se le suman los intereses correspondientes al período (n-1; n),

esto es: $I_{(n-1;n)} = C_0 \cdot i$, resulta::

$$C_{(n-1)} = C_0 + (n-1) \cdot C_0 \cdot i$$
$$+ \quad I_{(n-1;n)} = C_0 \cdot i$$

$$C_n = C_0 + (n-1) \cdot C_0 \cdot i + C_0 \cdot i = C_0 (1 + n \cdot i)$$

Gráficamente:



Las fórmulas precedentes: $C_n = C_0 + C_0 \cdot i \cdot n$, ó bien $C_n = C_0 (1 + i \cdot n)$, presentan al valor final de dos formas distintas pero equivalentes: a) la primera como el capital inicial más los intereses generados; b) la segunda como resultado de la acción del factor de capitalización por n períodos $(1 + i \cdot n)$ sobre el capital inicial. Cuando se considere la teoría matemática del interés y se analicen los sistemas continuos se verificará que las dos formas precedentes tienen carácter general y pueden ser derivadas para cualquier sistema de capitalización.

En todos los casos que analizamos se supuso que la tasa de interés permanecía sin cambios en los distintos períodos, pero si no fuera así, sino que la tasa es una magnitud variable se debe adaptar ligeramente la fórmula para dar cabida a este nuevo hecho.

Consideremos a modo de ejemplo un depósito de \$ 1.000 a 30 días de plazo efectuado el 05/04/96 que se renueva dos veces más, retirándose los intereses en cada oportunidad. Las tasas respectivas son 0,8%; 0,9% y 0,75% mensual.

Como se retiran los intereses y siempre se deposita el mismo capital de \$ 1.000 los intereses resultan:

$$I_{(0;1)} = C_0 \cdot i_1 = \$1.000 \times 0{,}008 = \$8$$

$$I_{(1;2)} = C_0 \cdot i_2 = \$1.000 \times 0{,}009 = \$9$$

$$I_{(2;3)} = C_0 \cdot i_3 = \$1.000 \times 0{,}0075 = \$7{,}5$$

Luego, $I_{(0;3)}$ =\$24,5 $C_3 = C_0 + I_{(0;3)}$ = \$1.000 + \$24,5 = \$1.024,5

La fórmula correspondiente es: $C_3 = C_0 + (C_0 . i_1 + C_0.i_2 + C_0.i_3) = C_0 + [1 + (i_1 + i_2 + i_3)]$

Para n períodos resultará: $C_n = C_0 \left[1 + \sum_{j=1}^{n} i_j\right]$

Esta fórmula es más general que $C_n = C_0 (1 + i . n)$ y contiene a ésta como caso particular: cuando la tasa de interés permanece constante en los diversos períodos.

En efecto, en caso de que las n tasas sean iguales, es decir $i_1 = i_2 = - - - = i_n = i$, entonces la masa total de intereses se puede calcular como el producto: i.n.

Esta formulación permite verificar una vez más que el hecho distintivo del interés simple es que en este régimen sólo el capital inicial produce intereses independientemente del hecho de que las tasas sean iguales o distintas.

Por último, señalemos que tradicionalmente la fórmula del interés simple se solía escribir como:

$$I = \frac{C \ . \ R \ . \ t}{100 \ . \ ut}$$

donde:

I: es el interés de la operación,
C: el capital inicial
R: razón, tasa de interés en tanto por ciento,
t: el tiempo (la duración de la operación)
ut: la unidad de tiempo

Esta fórmula es análoga a la que hemos considerado en el texto: $I_{(0:n)} = C_0 . i . n$. Las diferencias son que hemos preferido escribir $I_{(0:n)}$ y C_0 para denotar a qué período corresponden los intereses y al capital inicial, respectivamente; que en lugar de R/100__

escribimos directamente la tasa de interés como i y la expresamos en tanto por uno y que omitimos escribir t/ ut reemplazándolo por n (el número de períodos) porque hacemos coincidir las unidades en que se expresa el período (días, meses, años, etc.) con la correspondiente tasa de interés (tasa diaria, tasa mensual, tasa anual, etc.) y se torna innecesaria la denominación tradicional t/ut. .

3.3. Ejemplos de aplicación del régimen de interés simple

El régimen de capitalización a interés simple está muy difundido en la práctica financiera y se aplica en numerosas operaciones. Por ejemplo: en los depósitos a plazo, cuando se retiran los intereses, en las operaciones de descuento en la modalidad denominada descuento comercial o directo en la que el descuento se calcula como los intereses aplicados sobre el valor nominal (final) de la operación, en las operaciones de préstamo en el denominado sistema de interés directo, etc. Estas operaciones serán analizadas más adelante y se demostrará - en estos casos- que la utilización del sistema de interés simple conduce a enturbiar la transparencia de las operaciones, en el sentido que oculta la verdadera tasa de interés o tasa efectiva de la operación.

También se utiliza el interés simple en las operaciones de ahorro para calcular los intereses devengados dentro de un período de capitalización y el cálculo de “numerales” que efectúan las entidades financieras se basan en las reglas del interés simple

3.4. El interés simple y el rendimiento de las operaciones financieras

Una definición sencilla del rendimiento de una operación financiera de pago único es la que expresa la relación entre la masa de intereses y el capital. El resultado de ese cociente también puede denominarse tasa efectiva de interés, en el sentido de que es la tasa que efectivamente se aplica, de modo que en este contexto el rendimiento de una operación financiera y la tasa efectiva de interés serán conceptos equivalentes.

Ahora bien, si se considera el régimen de interés simple, en él el rendimiento es decreciente. En el punto anterior se puso de manifiesto que la masa de intereses de cada período es constante aún cuando el capital crece; por lo tanto, si se relaciona la masa de intereses de cada período con el capital disponible al inicio del mismo se verificará que el numerador es constante en

tanto que el denominador es creciente; por fuerza, el cociente que denominamos rendimiento o tasa efectiva de la operación será una magnitud decreciente.

En el ejemplo que hemos analizado la masa de intereses de cada período es constante e igual a \$ 8 . Pero el capital pasa de \$ 1.000 a \$ 1.008 de esta suma a \$ 1.016, de aquí a \$ 1.024 y así siguiendo; por consiguiente el rendimiento del i-ésimo período, r_i, resulta:

$$r_1 = \frac{\$8}{\$1.000} = 0{,}008 \qquad r_2 = \frac{\$8}{\$1.008} = 0{,}0079365$$

$$r_3 = \frac{\$8}{\$1.016} = 0{,}0078740 \qquad r_4 = \frac{\$8}{\$1.024} = 0{,}078125$$

y así siguiendo

Este hecho pone en entredicho la capacidad del interés simple para ser patrón de medida del rendimiento y debe concluirse que no es apto para tal cometido.

Uno de los objetivos del Cálculo Financiero es el de evaluar los resultados de las operaciones financieras y estos resultados se evalúan las más de las veces calculando la masa de intereses y relacionándola con el capital invertido, es decir calculando rendimientos. Pero, en el caso del interés simple el rendimiento es una magnitud decreciente y por lo tanto no puede ser utilizado como patrón (o unidad) de medida de aquél. Es como si midiéramos la longitud de un salón con una unidad de longitud que encoge o su superficie con un área que decrece a medida que proseguimos midiendo. Esto es un hecho inadmisible. También resulta inadmisible medir rendimientos mediante el interés simple. Entiéndase bien que no se cuestiona al interés simple, ya que es la expresión de un sistema de capitalización ampliamente difundido en la práctica, sino que se puntualiza que con este sistema no es posible evaluar rendimientos. Veremos que con el interés compuesto sí es posible esa evaluación y por este motivo se adoptará el uso de este sistema como patrón de medida general para determinar rendimientos o tasas efectivas o también para determinar lo que denominaremos más adelante tasa interna de rentabilidad, (que puede considerarse como sinónima de las dos nociones precedentes).

La pregunta que cabe formularse es a qué se debió el uso extendido del interés simple si posee tales limitaciones? . La respuesta proviene de lo “simple” de su cálculo, sin que esto pretenda ser un mero juego de palabras. El interés simple constituye una relación lineal y este tipo de relaciones es de cálculo sencillo: sólo intervienen la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Hace 40 o 50 años atrás no existían las calculadoras o eran muy incipientes y la suma, la resta, la multiplicación y la división eran operaciones manejadas

por la inmensa mayoría de la población; ello explica también el uso masivo del interés simple. Veremos que el interés compuesto es más complicado y su empleo requiere el uso de tecnología moderna para facilitar las operaciones. En realidad sin esta tecnología se torna sumamente difícil obtener resultados aplicando las reglas del interés compuesto, excepto en los casos triviales.

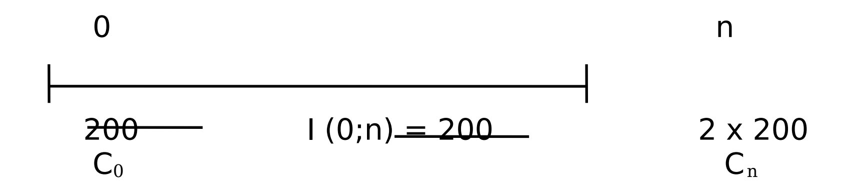
También el interés simple implica proporcionalidad (derivada de la relación lineal) y esta noción, en apariencia, está “en la naturaleza de las cosas”, ¿a quién se le ocurriría repartir, digamos $ 1000 entre dos personas que trabajaron 40 y 30 horas en proporciones distintas a 4/7 y 3/7?

Por otra parte, como en la época en que se utilizó masivamente el interés simple no había grandes tasas de inflación, entre nosotros, las tasas de interés eran muy bajas (hace 60 años eran del 2% anual para los depósitos de ahorro), los resultados no diferían mucho ya sea que en el cálculo interviniera el interés simple o el compuesto, aún cuando éste debiera ser utilizado por razones teórico-prácticas. Aún más, este último sistema estaba circunscripto a las universidades y centros profesionales y su conocimiento formabaparte del bagaje académico, no de lo que puede denominarse “acervo popular”; la proporción de universitarios no era tan alta como ahora y entonces temas tales como el rendimiento de las operaciones financieras y el interés compuesto eran prácticamente desconocidos para el gran público de entonces.

3.5. Ejercicios.

1. El 05/07/00 deposito un capital de $ 200 a 90 días de plazo a una tasa del 4%, a interés simple. Se desea saber en qué fecha podré retirar el doble de lo depositado si continúo depositando siempre a 90 días de plazo y a esa misma tasa?

Volcamos los datos en un eje de tiempo para visualizar la operación



Analizamos qué fórmula refleja la operación.

Nuestra incógnita es el plazo y sabemos que los intereses se calculan según las reglas del interés simple con una tasa constante, por lo tanto: $C_n = C_0 (1 + i n)$

Debemos considerar que si la tasa está expresada en un período de 90 días, el resultado que es el plazo n, en la fórmula, estará expresado en períodos de 90 días.

Si disponemos en la fórmula valor final los datos del problema obtenemos:

$$2 . 200 = 200 (1 + 0,04 n)$$

$$\frac{400}{200} -1 = 0,04 . n$$

$$1/ 0.04 = n = 25$$

Respuesta: 25 períodos de 90 días.

Otra forma posible de hacer la operación es aplicando:

$$C_n - C_o = I_{(0;n)} = C_o . i . n$$

El capital se duplica si los intereses ascienden a $ 200, así que:

$$200 = 200 . 0,04 . n$$

$$\frac{200}{200 . 0,04} = n = 25 \quad \text{períodos de 90 días.}$$

La respuesta nos indica que transcurrieron 25 períodos de 90 días desde la fecha del depósito o sea 2250 días. Por lo tanto hay que contar 2250 días a partir del 5/07/00. Ahora bien, 6 años a partir de esa fecha representan 2191 días (porque cada año tiene 365 días y 2004 es bisiesto) y restan 59 días para completar los 2250 días. Como los 6 años vencen el 05/07/2006 hay que contar 59 días a partir de esta fecha y, en consecuencia, la fecha de retiro es el 2/09/2006.

2. Si el 50% de un capital produce un interés de $ 3.000 en 5 meses al 1,2% mensual según las reglas del interés simple. ¿Cuál es el valor del mencionado capital?

El enunciado expresa una ecuación lineal con una incógnita: C_0. La ecuación es:

$$0,50 . C_o . i . n = \$3.000$$

Si se reemplaza i por 0,012 y n por 5 y se despeja se obtiene C_0 = $ 100.000.

Respuesta: El capital es igual a $ 100.000

3. Calcular al cabo de cuántos meses 2 capitales de $ 120.000 y $ 110.000 colocados a interés simple al 2% y 4% mensual, respectivamente, producen montos iguales.

Se trata de dos ecuaciones cuyas incógnitas son los plazos, digamos n_1 y n_2 , que deben ser igualadas porque los capitales producen montos iguales. Luego:

$120.000\ (1 + 0{,}02\ .\ n_1) = C_1$ y $110.000\ (1 + 0{,}04\ .\ n_2) = C_2$

Pero $C_1 = C_2$ así que igualando las dos ecuaciones resulta:

$$120.000 + 120.000\ .\ 0{,}02\ .\ n_1 = 110.000 + 110.000\ .\ 0{,}04\ .\ n_2$$

Como además el plazo debe ser único: $n_1 = n_2$. Así que la última ecuación se transforma en una ecuación con una incógnita, digamos n , que reemplaza a n_1 y a n_2 . Si se resuelve resulta:

Respuesta: 5 meses.

4. Por el alquiler del mes de mayo de un departamento un individuo recibe $ 892,50, dicha suma incluye el monto del alquiler más un 5% en concepto de recargo por pago fuera de término. Se desea saber dentro del total cobrado qué suma se ha percibido en concepto de recargo?

En este caso el alquiler más el 5% del alquiler representan $892,50. Esto puede escribirse así: 892,50 = A + 0,05 . A, donde A representa el alquiler. Si se despeja A se obtiene que el alquiler es $850, así que el recargo es $42,50.

Respuesta: El recargo asciende a $ 42,50

5. El 01/06/01 se han depositado $ 2.000, ganando un 2% mensual de interés. Luego de un cierto tiempo se retira el monto así formado y se deposita en un banco que paga el 1,5% de interés mensual, dejándolo un tiempo igual a tres meses más que el primer depósito. Se desea saber cuántos meses estuvo colocada la primera suma, si al finalizar el plazo total de la colocación, pude retirar un monto de $ 2.464.

Se hace notar que en este ejercicio se generan intereses sobre intereses porque vista la operación en conjunto, los intereses del primer depósito no se retiran sino que se agregan al capital para generar nuevos intereses, no se trata de una operación de interés simple sino de interés compuesto.

Volcamos los datos en un eje de tiempo:

01/06/01	$n_1 = ¿$	$n_2 = ¿$
$C_0 = 2000$	C_1	$C_2 = 2464$

Aplicamos la fórmula de monto:

$$C_1 = C_0\ (1 + i\ .\ n_1)$$

Si a este primer valor final le calculamos los nuevos intereses resultará:

$$C_2 = C_0 (1 + i_1 . n_1) (1 + i_2 . n_2)$$

$$2.464 = 2.000 (1 + 0.02 . n_1) (1 + 0.015 . n_2)$$

Asimismo $n_2 = n_1 + 3$; por lo tanto :

$$2.464 = 2.000 (1 + 0.02 . n_1) [1 + 0.015 . (n_1 + 3)]$$

Aplicando propiedad distributiva, tenemos:

$$2.464 = (2.000 + 40 . n_1) (1 + 0.015 . n_1 + 0.045)$$

$$2.464 = (2.000 + 40 . n_1) (1.045 + 0.015 . n_1)$$

$$2.464 = 2.090 + 30 . n_1 + 41.8 . n_1 + 0.6 n_1^2$$

Se trata de una ecuación de segundo grado y se recuerda que la fórmula para resolver ecuaciones de 2do. grado es:

$$x_1 = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}$$

Como la solución presenta 2 raíces tomamos solo la positiva.

Resolvemos la ecuación de 2do. grado:

$$0 = 0.6 .n_1^2 + 71.8 n_1 -374$$

$$n_1 = \frac{-71.8 + [71.8^2 - 4 x 0.6 (- 374)]^{1/2}}{2 x 0.6}$$

$n_1 = 5$

<u>**Respuesta**</u>: El 29/10/01 (o sea 5 meses)

6. El 01/07/01 una persona compra un electrodoméstico en \$ 85. Da un anticipo de \$ 20 y acuerda pagar el resto en 4 meses. Si la cuota es de \$18 ¿Qué tasa de interés simple mensual pagó?.
Consideremos la fórmula del valor final en el interés simple: $C_n = C_0 (1 + i . n)$.
Si se divide por n en ambos miembros y en lugar de C_n / n se escribe c, que representa a la cuota, resulta:

$$c = C_0 (1 / n + i)$$

$18 = 65 (1 / 4 + i)$

Si se despeja i se obtiene la tasa. La cuota ,c , corresponde al sistema directo de préstamos que está basado en las reglas del interés simple.

Respuesta: La tasa de interés mensual es 0,026923 o sea el 2,6923% .

7. Un comerciante deposita por el plazo de 60 días $15.000 en el banco A y $15.000 en el banco B. La tasa de interés que percibe en el banco A es el 0,9% y en el banco B el 1,1%. Se desea saber: a) el monto obtenido por ambos depósitos b)¿Cuál es la tasa promedio de interés de la operación, considerada como un todo?

$$C_{1A} = C_0 (1 + i_A) = 15.000 . 1{,}009 = 15.135$$

$$C_{1B} = C_0 (1 + i_B) = 15.000 . 1{,}011 = 15.165$$

El valor final obtenido es $30.300. El interés obtenido al cabo de los 60 días es $ 300 y la tasa de interés de toda la operación resulta del 1% .

Se puede ver fácilmente que la tasa de interés de toda la operación coincide con el

promedio aritmético de las tasas de interés, que hemos denotado mediante $\bar{i}$

$\bar{i} = [I_A + I_B] / 2. C_0 = [C_0 . i_A + C_0 . i_B] / 2. C_0 = [i_A + i_B] / 2.$

Esta fórmula se puede extender a más de dos capitales.

8. El 01/07/01 deposito $ 7.000 en una institución bancaria, $ 10.000 en otra institución y $ 5.500 en otra, los que son retirados el 15/08/01. Las respectivas tasas de interés para ese plazo son 1,6%, 1,75% y 2,05%. ¿Cuál será la tasa de interés media obtenida al cabo de 45 días?

En este caso resulta: $\bar{i} = [I_1 + I_2 + I_3] / \sum_j C_{0j} = [C_1 . i_1 + C_2 . i_2 + C_3 . i_3] / \sum_j C_j$

Esta última fórmula representa un promedio aritmético de las tasas ponderado por los capitales colocados. Las ponderaciones toman la forma: $C_j . / \Sigma C_j$.

En el ejercicio resulta:

1,6% . [7000 /22.500]+ 1,75% . [10.000 /22.500] + 2,05% . [5500 / 22.500] = 1,776667

El lector puede comprobar que este resultado coincide con el de sumar los intereses de cada una de las operaciones y luego dividir el resultado por la suma de los capitales depositados.

Respuesta: La tasa de 45 días es igual a 0,01777 o sea el 1,777%

9. Determinar el valor final de un capital de $ 1.800 depositado el 30/03/01 en las siguientes condiciones:

a) por un plazo de 30 días, renovándose la operación 5 veces más por el plazo de 30 días cada una.

b) la tasa de interés es del 1.15% para el plazo de 30 días en los dos primeros depósitos y del 1,29% para el plazo de 30 días en los últimos 4 depósitos.

c) en todos los casos se retiran mensualmente los intereses.

C_6 = 1800 (1 + 0,0115*2 + 0,0129*4) = 1934,28.

Respuesta: El valor final, o sea el monto es igual a $ 1934,28

10. Una cuenta en caja de ahorro presenta los siguientes movimientos:

01/09	Depósito	$1.500
10/09	Retiro	$ 500
28/09	Depósito	$1.300

Sabiendo que acredita intereses en forma mensual según las reglas del interés simple, a la tasa mensual del 1%, se desea determinar los intereses ganados durante el mes de septiembre y el saldo disponible al 01/10.

1500*(0,01/30) * 9 + 1000 * (0,01/30) * 18 + 2300 * (0,01/30) * 3 = 12,80

Respuesta: Los intereses generados durante el mes de septiembre son $ 12,80 y el saldo disponible es de $ 2.312,80.

11. El 05/04/96 se efectúa un depósito de $ 10.000 a 30 días de plazo, que en consecuencia vence el 05/05/96. La tasa de interés es el 0,8% mensual. Suponga que el 30/04/96 debe presentar un balance y en él debe incluir los intereses devengados por ese depósito ¿A cuánto ascenderán los mismos?

10.000 * (0,008/30) * 26 = 69,33

Respuesta: Los intereses devengados ascienden a $ 69,33.

12. Qué operaciones aritméticas incluyen las reglas del interés simple?

Respuesta: la suma, la resta, la multiplicación y la división.

CAPÍTULO 4. EL RÉGIMEN DE INTERÉS COMPUESTO.

La característica esencial del régimen de capitalización a interés compuesto es que los intereses que se generan en la operación se agregan al capital para producir nuevos intereses.

Para determinar las fórmulas que permiten efectuar los cálculos consideremos nuevamente el depósito de $ 1.000 que el 05/04/01 es colocado al 0,8% mensual durante 30 días y luego reinvertido dos veces más, pero ahora sin retirar los intereses.

Al cabo del primer mes el interés de la operación será como antes:

$I_{(0;1)}$ = $ 1.000 x 0,008 = $ 8 y el valor final al cabo de ese mes será:

C_1 = $ 1.000 + $ 8 = $ 1.008.

Esta suma ahora es reinvertida al 0,8% mensual ganando:

$I_{(1,2)}$ = $ 1.008 x 0,008 = $ 8,064. El valor final ahora es:

C_2 = $ 1.008 + $ 8,064 = $ 1016,064.

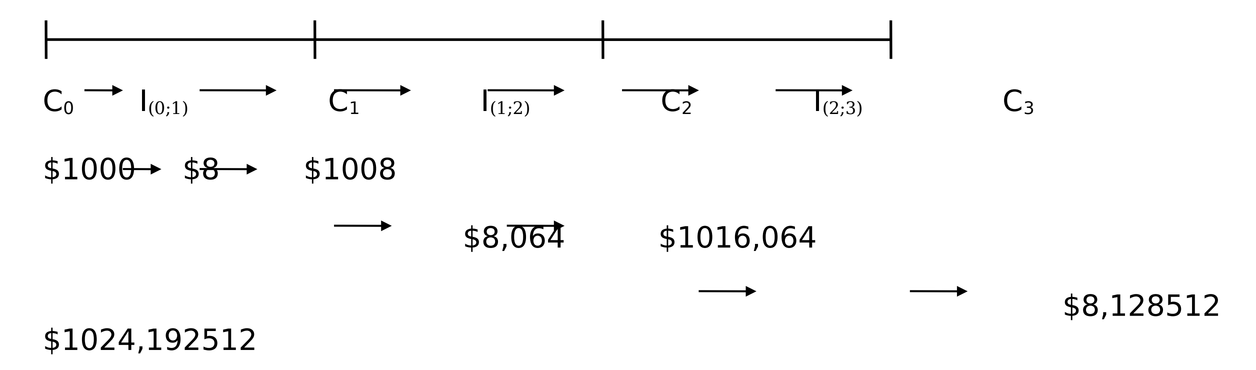
Esta suma es reinvertida y produce intereses por:

$I_{(2;3)}$ = $ 1.016,064 x $ 0,008 = $ 8,128512, de modo que el valor final resulta:

C_3 = $ 1.016,064 + $ 8,128512 = $ 1024,192512

Gráficamente, el esquema es el siguiente:

05/04/01 05/05/01 04/06/01 04/07/01



Se deduce que las fórmulas respectivas son:

$$I_{(0;1)} = C_0 \; . \; i = \$1000 \; . \; 0{,}008 = \$\,8$$

$$C_1 = C_0 + I_{(0;1)} = C_0 + C_0 \, . \, i = C_0 \,(1 + i) = 1008$$

$$I_{(1;2)} = C_1 \; . \; i = \$1008 \; . \; 0{,}008 = \$8{,}064$$

$C_2 = C_1 + I_{(1;2)} = C_1 + C_1 \, . \, i = C_1 \,(1 + i)$ y como $C_1 = C_0\,(1 + i)$ resulta que

$$C_2 = C_0\,(1 + i)^2 = \$1.000\,(1{,}008)^2 = \$1.016{,}064$$

Análogamente:

$$I_{(2;3)} = C_2 \; . \; i = C_0\,(1 + i)^2 \; . \; i = \$1.016{,}064 \; . \; 0{,}008 = \$8{,}128512$$

$C_3 = C_2 + I_{(2;3)} = C_2 + C_2 \; . \; i = C_2 \,(1 + i) = C_0 \,(1 + i)^2 \,(1 + i) = C_0 \,(1 + i)^3 =$

$$= C_0 \,(1 + i)^3 = \$1.000\,(1{,}008)^3 = \$1.024{,}192512.$$

El desarrollo anterior se puede presentar mediante el siguiente cuadro:

Fecha	Concepto	Importe	Fórmula
05/04/96	Depósito	$1.000	C_0
05/05/96	Interés	$1.000 x 0,008 =$8	$I_{(0;1)} = C_0 \, . \, i$
05/05/96	Valor Final	$1.000 + $8 = $1.008	$C_1 = C_0 + C_0 . i = C_0\,(1+ i)$
04/06/96	Interés	$1.008 x 0,008 = $8,064	$I_{(1;2)} = C_1 . \, i$
04/06/96	Valor Final	$1.008 + $8,064 = $1.016,064	$C_2 = C_1 + C_1 \, . \, i = C_1 . \; (\; + i)^2$
04/07/96	04/07/96	$1.016,064 x 0,008 = $8,128512	$I_{(2;3)} = C_2 \, . \, i$
04/07/96	Valor Final	$1.016,064+ $8,128512=$1.024,192512	$C_3 = C_2 + C_2 . \, i = C_2\,(1 + i) = C_0\,(1+i)^2\,(1+i) = C_0\,(1+i)^3$

4.1 Generalización de la fórmula del interés compuesto

Es sencillo ahora generalizar la fórmula. Supongamos que la fórmula que obtuvimos es válida para el período (n-1) esto es:

$$C_{(n-1)} = C_0 (1 + i)^{n-1}$$

Si a esta igualdad se le suman los intereses correspondientes al período (n-1; n), es decir:

$I_{(n-1;n)} = C_{n-1} . i$, entonces resulta:

$$C_{(n-1)} = C_0 \; (1 + i)^{n-1}$$

$$+ \quad I_{(n-1;n)} = C_{n-1} . i = C_0 \; (1 + i)^{n-1} . i$$

$$C_n = C_0 \; (1 + i)^{n-1} + C_0 \; (1 + i)^{n-1} . i = C_0 \; (1 + i)^n$$

Gráficamente:

0 1 n-1 n

$C_0 \rightarrow I_{(0;1)} = C_0 \, i \rightarrow C_1$ ...... $C_{(n-1)} \rightarrow I_{(n-1;n)} = C_{n-1} i \rightarrow C_n$

Esta fórmula sigue siendo válida si las tasas de interés no permanecen constantes. Si, por ejemplo, las tasas hubieran sido 0,8% mensual, 0,9% mensual y 0,75% mensual, en ese orden, el resultado hubiera sido:

$I_{(0;1)}$ = $1.000 x 0,008 = $8 C_1 = $1.000 + $8 = $1.008

$I_{(1;2)}$ = $1.008 x 0,009 = $9,072 C_2 = $1.008 + $9,072 = $1.017,072

$I_{(2;3)}$ = $1.017,072 x 0,0075 =$7,62804 C_3 = $1.017,072 + $7,62804 = $1.024,70004

Es fácil verificar que

$$C_n = C_0 + C_0 \, i_1 + C_1 \, i_2 + C_2 \, i_3$$

$C_n = C_0 + C_0 . i_1 + C_0 (1 + i_1) i_2 + C_0 (1 + i_1)(1+ i_2).i_3$

$C_n = C_0 [(1 + i_1)] + C_0 (1 + i_1) [i_2 + (1 + i_2) i_3]$

$C_n = C_0 (1 + i_1) (1 + i_2) + C_0 (1+ i_1) (1 + i_2) i_3 = C_0 (1 + i_1) (1 + i_2) (1 + i_3)$

En general: $C_n = C_0 [(1+ i_1) (1 + i_2) . . .(1 + i_n)]$

Si $i_1 = i_2 =. . .= i_n. = i$, se vuelve a: $C_n = C_0 (1 + i)^n$

Se hace notar que en la fórmula del interés compuesto el valor final a primera vista se presenta como el producto del capital inicial, C_0, por un factor de capitalización $(1 + i)^n$; sin embargo, también puede ser expresada como el capital inicial, más los intereses generados en los distintos períodos.

4.2 Ejemplos de aplicación del régimen de interés compuesto.

Algunos de los ejemplos donde se utiliza el interés compuesto son los depósitos a plazo renovables siempre que no se retiren los intereses; las operaciones de descuento, cuando se utiliza el denominado descuento a interés compuesto y los sistemas de préstamos francés y alemán

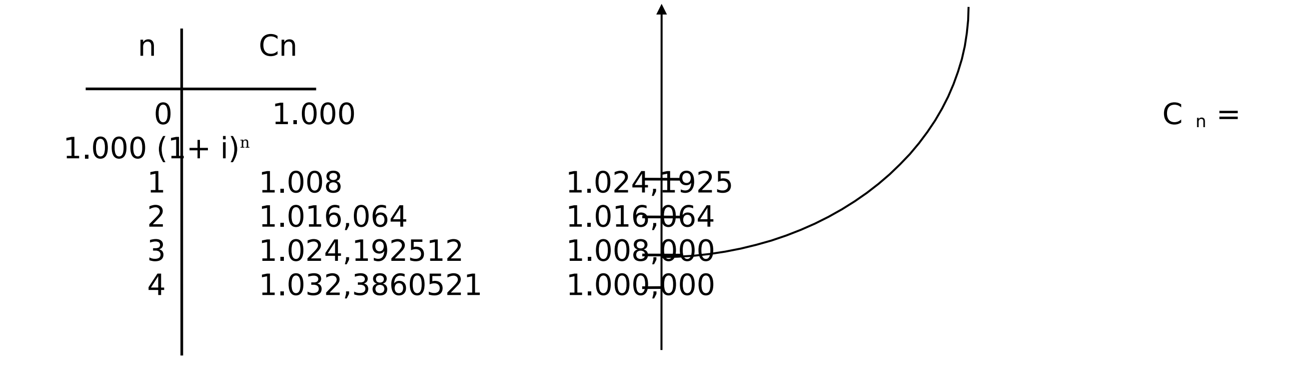
Las operaciones mencionadas serán analizadas más adelante.

4.3 El interés compuesto y la función exponencial

Si en la relación $C_n = C_0 (1 + i)^n$ consignamos para C_0 el valor 1.000, para i el valor 0,008 y damos a n valores arbitrarios 0, 1, 2, . ., entonces $C_n = C_0 (1 + i)^n$ representa una función exponencial si suponemos la continuidad de la función capital, la continuidad de la tasa de interés y la continuidad del tiempo.

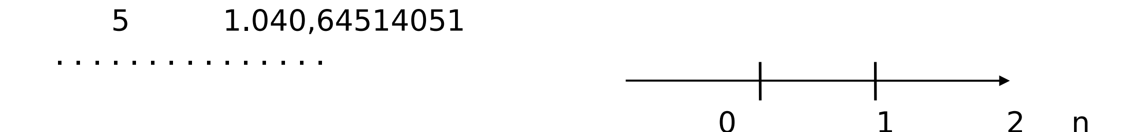
Así, se tiene:

n	Cn
0	1.000
1	1.008
2	1.016,064
3	1.024,192512
4	1.032,3860521



5 1.040,64514051

. . . .



Esta función crece con mayor velocidad que la función lineal y, por lo tanto, se verifica que en caso de partir de capitales iniciales iguales y aplicarse similares tasas de interés, los valores finales obtenidos mediante el régimen de interés compuesto, desde el 2do período de capitalización en adelante son superiores a los correspondientes al interés simple.

Se hace notar que los períodos de capitalización se refieren a instantes de tiempo ya que si esto no fuera así el gráfico anterior resultaría contradictorio puesto que dentro del primer período de capitalización el interés simple sería superior al interés compuesto. Y esto no puede ser posible porque para distinguir entre el interés simple y el compuesto
debe transcurrir más de un período de capitalización. En un ejemplo práctico el gráfico estaría compuesto por distintos puntos y no por una línea de trazo continuo.

La función exponencial es mucho más complicada que la función lineal. Habíamos visto que en la función lineal para hacer los cálculos, solo se requerían la suma, la resta, la multiplicación y la división. En la función exponencial, para hacer los cálculos, además de las operaciones indicadas en el párrafo anterior, se requiere el uso de exponentes y sus operaciones inversas: la radicación y la logaritmación. El desarrollo de las calculadoras de mano y, en general, el desarrollo de la computación, permiten hacer esas operaciones rápidamente, pero hace cuarenta o cincuenta años atrás, sin el auxilio de los ordenadores electrónicos, el cálculo manual era lento, tedioso y complicado y esto explica en gran medida el por qué del confinamiento del interés compuesto al claustro académico con escasa aplicación en la práctica financiera corriente.

4.4 El interés compuesto y el rendimiento

En el caso del interés simple vimos que el rendimiento era decreciente y por lo tanto este sistema de capitalización no podía ser admitido como patrón de medida para determinar rendimientos. Como en la práctica sólo están vigentes dos sistemas de capitalización si el régimen de interés compuesto no pudiera ser utilizado como unidad de medida estaríamos ante un serio problema para evaluar a las operaciones financieras.

Afortunadamente, veremos que éste no es el caso y que en el interés compuesto el rendimiento es constante, por lo tanto sirve como patrón, ya que se presenta como una unidad de medida fija.

Es sencillo verificar esa afirmación. Recordemos que habíamos definido el rendimiento como el interés sobre el capital invertido y, por consiguiente, debemos demostrar que en el interés compuesto se verifica:

$$\frac{I_{(0;1)}}{C_0} = \frac{I_{(1;2)}}{C_1} = \frac{I_{(2;3)}}{C_2} = \ldots\ldots = \frac{I_{(n-1;n)}}{C_{n-1}} = \text{constante}$$

En efecto:

$I_{(0;1)} = C_0 \cdot i$

$I_{(1;2)} = C_1 \cdot i$

$I_{(2;3)} = C_2 \cdot i$

. . . .

$I_{(n-1;n)} = C_{n-1} \cdot i$

Así que:

$$\frac{C_0 \cdot i}{C_0} = \frac{C_1 \cdot i}{C_1} = \frac{C_2 \cdot i}{C_2} = \ldots\ldots = \frac{C_{n-1} \cdot i}{C_{n-1}} = i = \text{constante}$$

En el ejemplo numérico considerado, la tasa de interés 0,008 representa el rendimiento (periódico) de la operación financiera. Este rendimiento es igual para todos los períodos e igual a la tasa de interés de la operación.

Como la tasa de interés pactada en la operación coincide con la tasa efectiva de la misma, en este sentido afirmamos que es un sistema transparente.

Esta comprobación simplifica enormemente el problema de la evaluación de las operaciones financieras: teniendo en cuenta que sólo existen -al menos en forma práctica- dos sistemas de capitalización y sólo uno: el régimen de interés compuesto presenta rendimientos constantes, éste será utilizado, con exclusión de cualquier otro, como patrón de medida del rendimiento y es por este hecho que actúa como elemento evaluador o, si se quiere, como modelo de comportamiento de las operaciones transparentes.

Esta afirmación es válida tanto para las operaciones de pago único como para las de pago múltiple: la tasa de interés de la operación calculada según las reglas del interés compuesto será la tasa efectiva de la misma o como se suele denominar la tasa interna de rentabilidad.

4.5 <u>El interés compuesto y el problema del anatocismo</u>

El anatocismo es una institución jurídica cuya raíz etimológica deriva del griego aná, que significa reiteración y tokimós, dar a interés. Se refiere al cobro de intereses sobre intereses. Esta es una de las características esenciales del interés compuesto, que como hemos visto, agrega los intereses al capital para generar nuevos intereses.

Nuestro Código Civil en el artículo 623 establecía originariamente la prohibición de cobrar intereses sobre intereses pero en abril de 1991 la Ley 23928 (Ley de Convertibilidad) modificó al citado artículo y faculta su cobro por acuerdo entre las partes. A continuación se transcribe dicho artículo en su versión actual:

Art. 623. No se deben intereses sobre intereses, sino por convención expresa que autorice su acumulación al capital con la periodicidad que acuerden las partes; o cuando

liquidada la deuda judicialmente, con los intereses, el juez mandase pagar la suma que resultare y el deudor fuese moroso en hacerlo. Serán válidos los acuerdos de capitalización de intereses que se basen en la evolución periódica de la tasa de interés de plaza.

La Ley de Convertibilidad puso fin a la prohibición del cobro de intereses sobre intereses que existía en el Código Civil y a las ambigüedades de nuestra legislación.

En el Código de Comercio se autoriza el cobro de intereses sobre intereses en el Artículo 569, que dice:
“ Los intereses vencidos pueden producir intereses, por demanda judicial o por una convención especial. En el caso de demanda, es necesario que los intereses se adeuden por lo menos un año .

Producen igualmente intereses los saldos líquidos de las negociaciones concluidas al fin de cada año.”

Pero en el artículo 570, los prohibe si se ha intentado la demanda judicial por el capital y los réditos, tal como se especifica. “Intentada la demanda judicial por el capital y réditos, no puede hacerse acumulación de los que se vayan devengando, para formar aumento de capital que produzca réditos.”

También se autoriza el anatocismo legal en los artículos 788, referido a la cuenta corriente mercantil y el art. 795, sobre la cuenta corriente bancaria, que se transcriben a continuación.

Art. 788: Las partes podrán capitalizar los intereses en períodos que no bajen de 3 meses, determinar la época de los balances parciales, la tasa del interés y la comisión, y acordar todas las demás cláusulas accesorias que no sean prohibidas por la ley.

Art. 795: En la cuenta corriente bancaria los intereses se capitalizarán por trimestre, salvo
estipulación expresa en contrario.

A modo de síntesis, la aplicación de intereses sobre intereses y con ello las reglas del interés compuesto han cobrado mucho mayor relevancia desde la vigencia de la Ley de convertibilidad por las modificaciones que introdujo en el Código Civil, eliminando, en gran medida, la ambigüedad que había sobre este tema.

4.6. Ejercicios.

1. Dispongo de $ 35.000 que invierto en una institución bancaria desde el 15/09/01 hasta el 15/10/01a la tasa del 0,9% mensual; el monto reunido lo reinvierto en otra entidad hasta el 13/01/02, a la tasa del 0,79% mensual Se desea saber:

a) ¿Cuál es el valor final obtenido el 13/01/02?
b) ¿Cuál es el rendimiento total de ambas operaciones consideradas en su conjunto?
c) ¿Cuál es el rendimiento mensual de ambas operaciones consideradas en su conjunto?

Calculamos el valor final a 30 días, que se transforma en el capital inicial de la segunda. operación

0 30 120

$i = 0{,}009$ $i' = 0{,}0079$

C_0 → C_{30} → C_{120}

35.000

Como:

$$C_{120} = C_{30} (1 + i')^3$$
$$C_{30} = C_0 (1 + i)$$

Resulta:

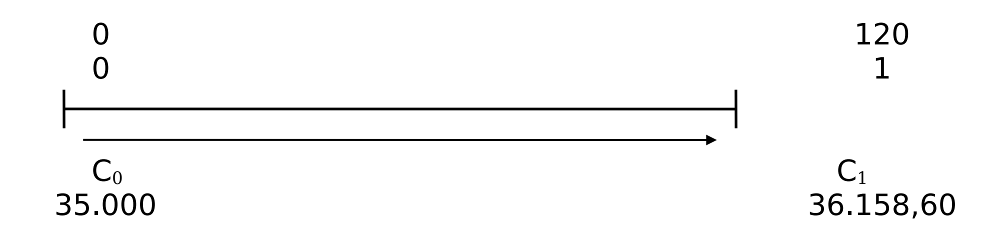
$$C_{120} = C_0 (1+i)(1+i')^3$$

De acuerdo con los datos tenemos:

$$C_{120} = 35.000 (1+0{,}009) (1+0{,}0079)^3 = 36.158{,}60$$

Con lo que queda contestado el punto a).

Calculemos ahora el rendimiento total de ambas operaciones en su conjunto:



Utilicemos la fórmula del valor final para despejar la tasa efectiva (término que utilizamos como sinónimo de rendimiento)

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

Si incluimos los datos en la fórmula resulta:

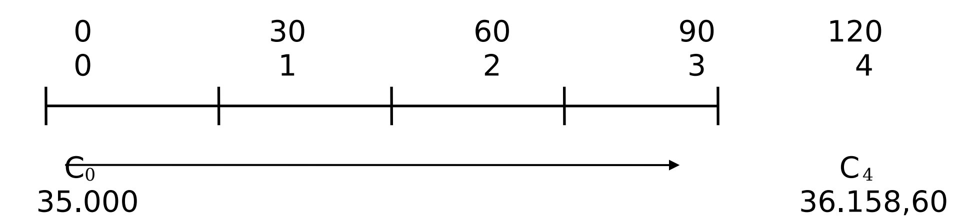
$$36.158,60 = 35.000 (1 + i)^1$$

$$i = (36.158,60 / 35.000) - 1$$

$$i = 0,0331 \text{ o } 3,31\%$$

El rendimiento es del 3,31% para el plazo de 120 días.

Calculemos el rendimiento mensual de ambas operaciones en conjunto:



Utilicemos como en el paso anterior la fórmula del valor final para despejar la tasa mensual

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

Si incluimos los datos en la fórmula se tiene:

$$36.158,60 = 35.000 (1 + i)^4$$

$$i = [(36.158,60 / 35.000)]^{1/4} - 1 =$$

$$i = 0,0081749 \text{ o } 0,82\% \text{ mensual}$$

Nótese que este último resultado se obtiene mediante el promedio geométrico de los valores finales. En efecto:

$$i = [1,009 * 1.0079^{3}]^{1/4} – 1 = 0,0081749.$$

2. ¿A qué tasa mensual se duplica un capital a interés compuesto en 4 años?

$$C_{48} = C_0 (1 + i)^{48} = 2 \; . C_0$$

Así que: $$(1 + i)^{48} = 2$$

Respuesta: A la tasa del 0,0145453 mensual, o sea el 1,45453%.

3. ¿Qué capital colocado durante el período comprendido entre el 04/09/01 y el 01/02/02 (cinco períodos de 30 días) al 1% mensual, ha generado a interés compuesto un valor final que supera en $ 50,50 al que se hubiera obtenido si esa suma hubiera sido colocada a esa misma tasa pero a interés simple?.

$$C_0 (1 + 0{,}01)^5 - C_0 .(1{,}05) = 50{,}50 \; .$$

Respuesta: El capital colocado fue de $ 50.000

4. ¿A qué tasa, a interés simple, debió haberse impuesto el capital de $50.000 al que se refiere el ejercicio anterior para que el valor final fuera igual al obtenido a interés compuesto a la tasa del 1% mensual?

$$50.000 \, . \, (1 + 0{,}01)^5 – 50.000 \, .(1+ 5. \, i) = 0 \; .$$

Respuesta: la tasa para igualar los montos es la tasa mensual igual a 0,010202 o sea el
1,02%.

5. Se han depositado $ 10.000, $ 5.000 y $ 8.000, en tres instituciones diferentes que abonan el 1.5%, 1.25% y 2.01% mensual de interés, respectivamente, Esos capitales estuvieron colocados 120 días cada uno, desde el 24/03/01, hasta el 22/07/01 y fueron renovados cada 30 días sin retirar los intereses. Determinar la tasa promedio mensual de interés

$$I_1 = 10.000 \, . \, (1 + 0{,}015)^4 – 10.000 = 613{,}64$$

$$I_2 = 5.000 \, . \, (1 + 0{,}0125)^4 – 5.000 = 254{,}73$$

$$I_3 = 8.000 \, . \, (1 + 0{,}0201)^4 – 8.000 = 662{,}85$$

El interés ganado es $1531,22. Como el capital es $23.000 la tasa por 120 días es: 0,066575, es decir, 0,016244 mensual, empleando reglas del interés compuesto.

Respuesta: la tasa promedio mensual es 0,01624 o sea el 1,62%

6. ¿Cuál es la tasa de colocación de un capital de $ 1.000 que estuvo depositado desde el 03/08/96 hasta el 02/09/96, siendo capitalizado cada 10 días, habiéndose obtenido un interés total de $ 55?

$$1.000(1 + i)^{3} – 1.000 = 55$$

Respuesta : la tasa para 10 días es 0,018007 o sea 1,8%.

7. Las deudas que registra un comerciante con la firma XX es la siguiente:

Factura "A" 0000-00034344 del 01/06/96 $ 1.030, precio de contado
Factura "A" 0004-00002323 del 15/05/96 $ 2.700, precio de contado
Factura "A" 0025-00021214 del 15/04/96 $ 1.830, precio de contado

¿Considerando una tasa de interés mensual del 2,05%, determinar cuánto debe pagar para cancelar sus deudas el 14/06/96, sabiendo que la capitalización de intereses es mensual?

En la primer factura hay una mora de 13 días, en la segunda una mora de 30 días y en la tercer factura una mora de 60 días.

$1030 . (1,0205)^{13/30} + 2.700 . (1,0205) + 1830 . (1.0205)^{2} = 5700,2463.$

Respuesta: Deberá abonar $ 5.700,25

8. El deudor de una operación inmobiliaria desea saldar su deuda de $ 50.000, cuyo vencimiento opera el 05/12/01. Con el fin de formar un fondo con el cual poder hacer frente a su obligación en la fecha convenida, efectúa diversos depósitos bancarios (con capitalización mensual) a una tasa del 1% mensual. Los depósitos los realiza en las siguientes fechas:

07/08/96	$ 11.580
06/09/01	$ 5.000
06/10/01	$ 15.000
05/11/01	$ . . ¿ . .

Se desea saber cuánto deberá depositar el 05/11 para reunir los $ 50.000 necesarios a la fecha del vencimiento.
Desde el 7/08 hasta el 5/12 hay 120 días, desde el 6/09 hasta el 5/12 hay 90 días, en el tercer depósito hay 60 días y el último depósito dura 30 días.

Por lo tanto: $11.580 . (1,01)^{4} + 5.000 . (1,01)^{3} + 15.000 . (1.01)^{2} + C . (1.01) = 50.000$

Respuesta: Si se despeja C resulta: $17.323,56.

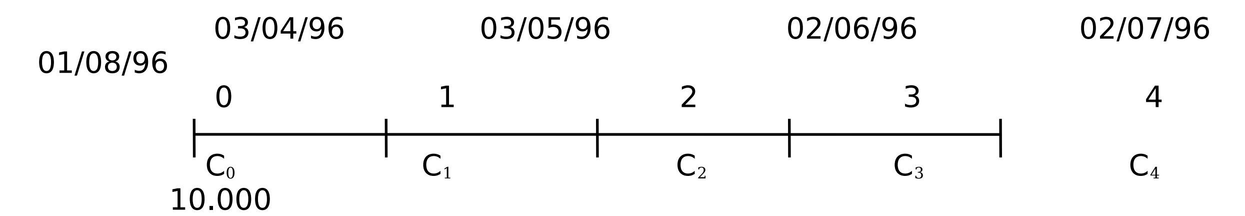
9. Un asesor financiero me asegura que depositando en la entidad ZZ un capital X de dinero y renovándolo cada 30 días, al cabo de 50 períodos se triplica. ¿Cuál es la tasa periódica que debe oblar la entidad para que sea real la propuesta?

$$C_0 \, (1 + i)^{50} = 3 . C_0 \; .$$

<u>Respuesta</u>: la tasa para el plazo de 30 días es 0,022215 o sea el 2,22%

10. El 03/04/96 se efectuó un depósito de $10.000 en un banco por 30 días a la tasa mensual del 1,5%, con la intención de renovar la operación a su vencimiento por tres períodos más reinvirtiendo los intereses a la misma tasa. Al efectuar la última renovación la tasa ha disminuido, motivo por el cual deberé renovar la operación por el plazo de 45 días si quiero obtener el mismo valor final que con la tasa anterior. ¿A cuánto debe ascender la nueva tasa mensual?

Volcamos los datos en un eje de tiempo:



Utilizamos la fórmula del Valor final:

$$C_n = C_0 \, (1 + i)^{n}$$

$$C_4 = 10.000 \, (1 + 0{,}015)^{4}$$

$$C_4 = 10.613{,}64$$

El valor final obtenido al finalizar la última renovación si la tasa no se hubiera modificado sería $ 10.613,64.

Ahora debemos llegar a ese mismo valor pero modificando la tasa del último período:

$$10.613{,}64 = 10.000 \, (1 + 0{,}015)^{3} \, (1 + i)^{1{,}5}$$

$$i = \left(\frac{10.613{,}64}{10.000 \times (1 + 0{,}015)^{3}} \right)^{1/1{,}5} - 1$$

$$i = 0{,}0099752$$

<u>Respuesta</u>: La nueva tasa mensual es del 0,0099752 o sea el 0,99752%

11. El 05/08/01 un individuo decide adquirir un automóvil, cuyo valor de contado es de $15.000, para ello cuenta con dos alternativas.
a) Pagar el valor del rodado al contado, o sea $ 15.000.
b) Abonar $ 6.000 al contado y $ 9.100 a los 30 días.
¿Cuál es la más conveniente de las dos alternativas, si sabemos que al 05/08/01 la tasa mensual que abonan los bancos por depósitos a 30 días es del 1,5%.

La comparación debe hacerse en un mismo momento. Elegimos la fecha de vencimiento de la operación. (Los resultados no se alteran si hubiéramos elegido el 05/08/01).

Los $15.000 valen al vencimiento $ 15.000 . (1, 015) = $ 15.225.
La segunda alternativa al vencimiento vale: $6.000 .(1,015) + $9.100 = $ 15.190

<u>Respuesta</u>: Conviene más la alternativa b).

12. Calcular desde que fecha una cierta suma de dinero estuvo colocada a cada tasa en un banco que capitaliza cada 40 días, si dicha entidad pagaba el 2,15% y luego el 2,25% efectivo para el plazo de 40 días. El valor final reunido el 13/10/95, fecha de vencimiento de la operación, fue de $ 1.352,19, los intereses ganados en toda la operación fueron de 352,19 al cabo de 560 días y no se retiraron intereses

Si denominamos n_1 al primer plazo de 40 días y n_2 al segundo, se comprueba que como 560 días incluyen 14 períodos de 40 días, se tiene: $n_2 = 14 - n_1$.

Por otra parte, si los intereses ganados en toda la operación son $ 352,19, entonces el capital inicial es de $1000. Así que:

$$1000 * (1,0215)^{n_1} * (1,0225)^{14 - n_1} = 1352,19$$

$$(1,0215 / 1,0225)^{n_1} = 1352,19 / (1000 * 1,0225^{14})$$

$$n_1 = \log 0,9902647 / \log 0,999022$$

$$n_1 = 10 \quad \text{así que} \quad n_2 = 4$$

<u>Respuesta</u>: El dinero estuvo colocada a la tasa del 2,15% mensual, durante 10 períodos, desde el 01/04/94 hasta el 6/05/95 y a la tasa del 2,25% durante 4 períodos, desde esta última fecha hasta el vencimiento.

CAPÍTULO 5. TASAS ABONADAS POR PERÍODO VENCIDO.

5.1. Tasa nominal de interés.

Damos el nombre de tasas abonadas por período vencido a aquellas tasas que aplicadas a un capital, generan intereses que se abonan al finalizar el período. Un ejemplo lo constituyen los depósitos a plazo, en los que los intereses se abonan una vez que concluye el período en que estuvo depositado el capital. Por consiguiente, las tasas que generaron esos intereses se denominan tasas abonadas por período vencido o bien, simplemente, "tasas vencidas". En la "jerga financiera" también se denominan tasas de interés (a secas). Cuando se celebra un contrato financiero y se han acordado todos los detalles inclusive que las tasas serán abonadas por período vencido, un aspecto relevante del mutuo es la especificación y la magnitud de la tasa de interés que se aplicará en el contrato; es decir, cuál es y la cuantía de la tasa contractual. Esta tasa contractual que será la vigente en la operación se expresa generalmente en tanto por ciento anual y se denomina tasa nominal de interés anual, tasa anual contractual de interés o sencillamente tasa anual vencida. Es, por lo general, la primer tasa que se pacta en una operación financiera.

Es la tasa que habitualmente que dan a publicidad las entidades financieras y es informada a través de los conmutadores telefónicos que vinculan a las mesas de dinero. Genéricamente, la tasa nominal de interés anual puede definirse como el interés que sería abonado al cabo de un año, si durante ese lapso, se mantiene depositada una unidad monetaria.

Ahora bien, como en la práctica los capitales son colocados por fracciones de año, habitualmente rigen distintas tasas nominales anuales, en correspondencia con los distintos plazos de duración de los contratos. Por ejemplo, si un banquero prefiere que los clientes depositen el capital por más tiempo, puede ofrecer el 6% de interés anual para el plazo de 30 días, el 6,20% para el plazo de 60 días, el 6,30% para el plazo de 90 días y así siguiendo. De esta manera, las tasas nominales anuales de interés son válidas para un período dado, que suele expresarse por lo general en días (o bien en meses) y por este motivo representaremos a la tasa anual nominal de interés vigente para el plazo de m días mediante la sigla $j_{(m)}$. Por ejemplo $j_{(30)} = 0,06$ indicará que la tasa nominal de interés para el plazo de treinta días es el 6% anual.

5.1. Tasas Proporcionales, tasas efectivas anuales y comparación entre las tasas vencidas.

Cuando se efectúa una colocación por un plazo de m días, se debe adecuar la tasa nominal anual de interés a dicho plazo; el mercado, (la práctica financiera), realiza esa asignación proporcionando la tasa nominal a la duración del plazo. Cuando estos plazos se estipulan en días, la relación se formula, en

nuestra plaza, considerando un año de 365 días porque así lo establecen las respectivas normas del Banco Central. Estas rigen para todo el sistema financiero que de él depende y que de ahora en más denominaremos sistema financiero institucionalizado.

Así, por ejemplo, si la tasa nominal de interés para el plazo de 30 días es el 6% anual
entonces, la tasa que se aplicará en el período de 30 días es:

$$\frac{0{,}06 \;.\; 30}{365} = 0{,}0049315 \text{ ó } 0{,}49315\%.$$

Si una persona deposita $ 10.000, al cabo de ese lapso recibirá:

$ 10.000 x 0,0049315 = $ 49,32 en concepto de interés, esto es un valor final de

$ 10.049,32. El valor final se obtiene agregando el capital a los intereses o bien efectuando directamente:

$$C_{30} = 10.000 \;.\; (1,\, 0049315) = 10.049{,}32.$$

Considerando en general un plazo genérico de m días la proporcionalidad se puede formular de la siguiente manera:

$$\frac{j_{(m)} \;.\; m}{365}$$

Cabe señalar que en algunos países el divisor no es 365 sino 360; por ejemplo, cuando se utiliza la denominada tasa LIBO o LIBOR(siglas de London, Interbank Offer Rate) el divisor es 360.

Lo que hemos expresado podemos sintetizarlo de la siguiente manera: 1) la primer tasa que surge en una operación financiera es, por lo general, la tasa nominal anual de interés, b)esta tasa rige para un plazo dado y así diremos que la tasa nominal de interés para el plazo de 45 días es 5% anual, para el plazo de 60 días es 5,20% anual y así siguiendo y c) la aplicación de la tasa anual al plazo en cuestión se efectúa proporcionando directamente la tasa a la cantidad de días de la operación. En nuestra plaza el divisor fijo es 365 días.

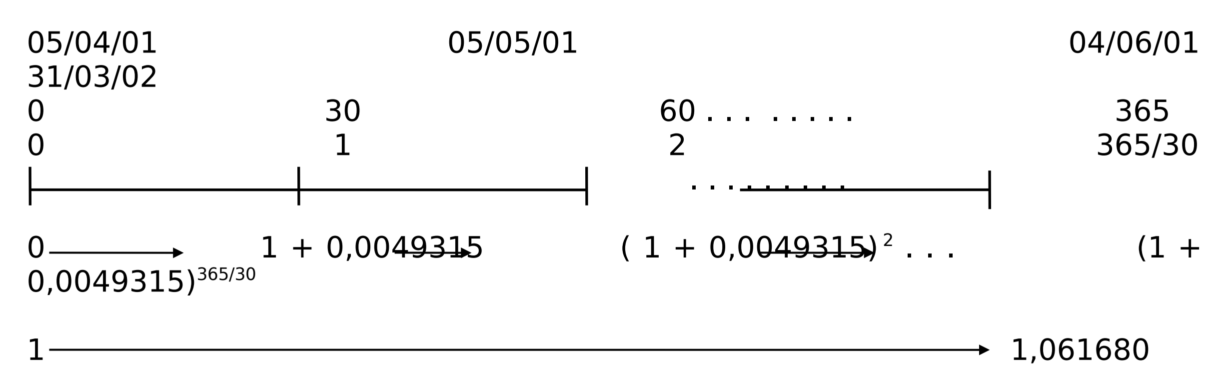
Pero cuando deseamos efectuar comparaciones entre tasas las consideraciones anteriores son insuficientes. Supongamos que el día 05/04/01 podemos hacer dos inversiones alternativas: a) depositar $ 10.000 al 6% anual durante 30 días y luego renovar la operación en las mismas condiciones por otros 30 días más o bien b) depositar los $10.000 al 6,10% anual durante 60 días La primer pregunta que efectuamos para tomar una decisión es ¿Qué operación será más conveniente?.

Para efectuar el cálculo debemos emplear las reglas del interés compuesto no sólo porque se supone la reinversión de los intereses sino porque de acuerdo a lo visto - y este punto es central en la argumentación- este sistema es el único que suministra un método consistente de valuación de los rendimientos. Por otra parte, como los plazos son muy variables convendrá generalizar la comparación estableciendo un único plazo y convirtiendo los demás a él.
Este plazo único es el año y el cálculo se efectúa transformando las tasas a términos anuales, suponiendo la reinversión de los intereses, es decir utilizando las reglas del interés compuesto y luego comparando los rendimientos.

En el ejemplo el plazo es 30 días y en un año hay 365/30 = 12,1666667 períodos de 30 días, así que si la tasa es del 6% anual (esto es, el 0,49315% para 30 días), capitalizada a interés compuesto durante 12,1666667 períodos resulta un valor final de :

$$(1+ 0{,}0049315)^{12{,}1666667} = 1{,}061680$$

En el diagrama siguiente se puede apreciar el proceso de capitalización.



El rendimiento es la diferencia entre el capital final y el inicial, esto es: 1,061680 – 1 = 0,061680 ó bien: 6,168% anual. Como el cálculo se ha efectuado para una unidad de capital, el rendimiento es el interés ganado con relación a esa suma; es una tasa y se denomina tasa efectiva de interés anual. Cuando no haya lugar a confusión, la denotaremos mediante la letra i, o bien mediante la sigla TAE.

La tasa anual efectiva de interés para el plazo de m días puede ser definida de la manera siguiente: es aquella tasa efectiva o rendimiento i que resulta de capitalizar a interés compuesto la tasa vigente en el período de m días, 365/m veces en el año.

Como es una tasa, el capital inicial es una unidad monetaria y si la tasa vigente en el

período es: $(j_{(m)} \; . \; m \; / \; 365)$, se tendrá:

$$i = \left(1 + j_{(m)} \cdot m / 365\right)^{365/m} - 1 \qquad (3.1.1)$$

El primer término del 2do. miembro expresa el valor final obtenido por una unidad monetaria después de ser capitalizado a interés compuesto 365/m veces en el año. Cuando se le resta el capital inicial se transforma en el rendimiento, en este caso la tasa anual efectiva de interés.

El valor final para $10.000 al cabo de un año resultará $10.000 x 1,061680 = $10.616,80, pero esta cifra tiene sentido fundamentalmente con propósitos de comparación porque resultará difícil creer que la tasa se mantendrá sin variaciones durante el año.
En el caso del 6,10% anual correspondiente al plazo de 60 días, la tasa vigente en ese período es:

$$\frac{0{,}0610 \cdot 60}{365} = 0{,}0100274$$ y la tasa efectiva anual aplicando (3.1.1) resulta:

$$i = (1 + 0{,}0100274)^{365/60} - 1 = 0{,}062576 \text{ ó } 6{,}2576\%$$

El proceso se puede observar en el diagrama siguiente:

05/04/01 04/06/01 03/08/01
31/03/02
0 60 120 365
0 1 2 365/60

. . . .

0 → 1 + 0,0100274 → (1 + 0,0100274)^2 . . . (1 + 0,0100274)$^{365/60}$

1 → 1,062576

La tasa anual efectiva de esta colocación es mayor, por lo tanto ésta resultará preferible a la primera. Si se desean obtener los resultados correspondientes a $ 10.000 se multiplican los obtenidos para $ 1 por aquella cifra: $ 10.000 . 0,062576 = $ 62,58; es el interés que se hubiera generado al cabo de un año reinviertiendo los intereses y, por lo tanto, el capital final sería:

$ 10.000 + $ 62,58 = 10.062,58 ó bien: $ 10.000 x $ 1,06258 = $ 10.062,58

El año fue el período que sirvió de base para verificar qué tasa era preferible, pero esta es una elección originada en la practicidad y la costumbre, cualquier otro período podría haber servido como base sin que se alterara el sentido de

la comparación: siempre la segunda colocación tendría mayor rendimiento que la primera. Esto se explica por lo comentado en el Apéndice al Capítulo 4, acerca de la armonía de las reglas del interés compuesto que conducen a que se obtengan resultados análogos independientemente de los caminos de capitalización recorridos. Esto a su vez es producto de que en este sistema el rendimiento es constante por unidad de tiempo.

En el apartado siguiente efectuaremos la misma comparaciones análogas a la precedente utilizando plazos distintos al año.

5.2 Tasas equivalentes

Las tasas equivalentes como su nombre lo indica se caracterizan por producir a una fecha dada, igual valor final, y por ende igual rendimiento (considerando el régimen de interés compuesto), independientemente de los períodos de capitalización a que fueron efectuadaslas colocaciones.
Esto significa que dos tasas son equivalentes si los valores finales que resultan de la capitalización son iguales en una fecha dada, aún cuando los períodos de capitalización sean distintos.

Por ejemplo, la tasa del 1% para el plazo de 30 días es equivalente al 2,01% para el plazo de 60 días puesto que el valor final a interés compuesto producido por la primer colocación es:

$$(1 + 0{,}01)^2 = 1{,}0201$$

lo que equivale a un rendimiento de 1,0201 - 1 = 0,0201 ó 2,01% para el plazo de 60 días. Análogamente, el 2,01% para el plazo de 60 días es equivalente al 1% para el plazo de 30 días.

El punto de partida para el cálculo de las tasas equivalentes son las tasas que rigen efectivamente en cada período, genéricamente las tasas efectivas, y continuando con el hilo de nuestra exposición procederemos a calcular las tasas para m días de plazo, equivalentes a la tasa efectiva anual.

Denominaremos $i_{(m)}$ a la tasa equivalente para el plazo de m días. Esta tasa, capitalizada a interés compuesto durante 365/m períodos en el año deberá producir igual valor final que la correspondiente tasa efectiva anual; por consiguiente deberá verificarse:

$(1 + i_{(m)})^{365/m} = 1 + i$. Un razonamiento sencillo conduce a: $i_{(m)} = (1 + i)^{m/365} - 1$.

Considerando el ejemplo del apartado anterior. Supongamos que la tasa efectiva anual sea 6,1680% y que se desee hallar la tasa equivalente para el plazo de 30 días.

Resulta: $(1 + i_{(30)})^{365/30} = 1 + 0{,}061680$

$$i_{(30)} = (1 + 0{,}061680)^{30/365} - 1 = 0{,}0049315$$

(3.2.1)

Esto significa que 0,49315 % para el plazo de 30 días es equivalente a 6,1680% efectivo anual.

La tasa para el plazo de m días equivalente a la tasa efectiva anual puede definirse como aquella tasa que capitalizada (a interés compuesto), 365/m veces en el año produce idéntico valor final que la tasa efectiva anual capitalizada sólo una vez.
Se puede observar que esta definición es esencialmente similar a la de tasa efectiva formulada en el punto 3. 1.

Esto no debe sorprendernos puesto que se trata de dos facetas de una misma cuestión: ambas son tasas efectivas; la equivalente para el subperíodo de 30 días y la anual para el período de un año; ambas producen igual valor final a una fecha dada y además como la valuación emplea las reglas del interés compuesto, este hecho garantiza la "armonía" y concordancia de los resultados y de ahí que se amalgamen en una relación única.

La fórmula 3.2.1, correspondiente a la tasa de 30 días equivalente a la efectiva anual, expresa el rendimiento obtenido por un capital de $ 1 colocado a 30 días cuya tasa
efectiva anual es 6,1680%. El primer término del segundo miembro representa el valor final del capital unitario al cabo de 30 días y si se observa el exponente se puede concluir que fue obtenido mediante una operación que abarcó dos etapas: en la primera, la tasa efectiva anual fue transformada en tasa equivalente diaria, calculando el rendimiento por un día, y en la segunda etapa la tasa equivalente diaria fue capitalizada (a interés compuesto) durante 30 días para obtener la tasa requerida del subperíodo.

Si se parte del valor final que al cabo del año fue 1,061680, correspondiente a una tasa anual efectiva del 6,1680%; la tasa equivalente diaria resulta:

$$i_{(1)} = (1 + 0{,}061680)^{1/365} - 1 = 0{,}00016399$$

La tasa equivalente (o efectiva) para el plazo de 30 días es:

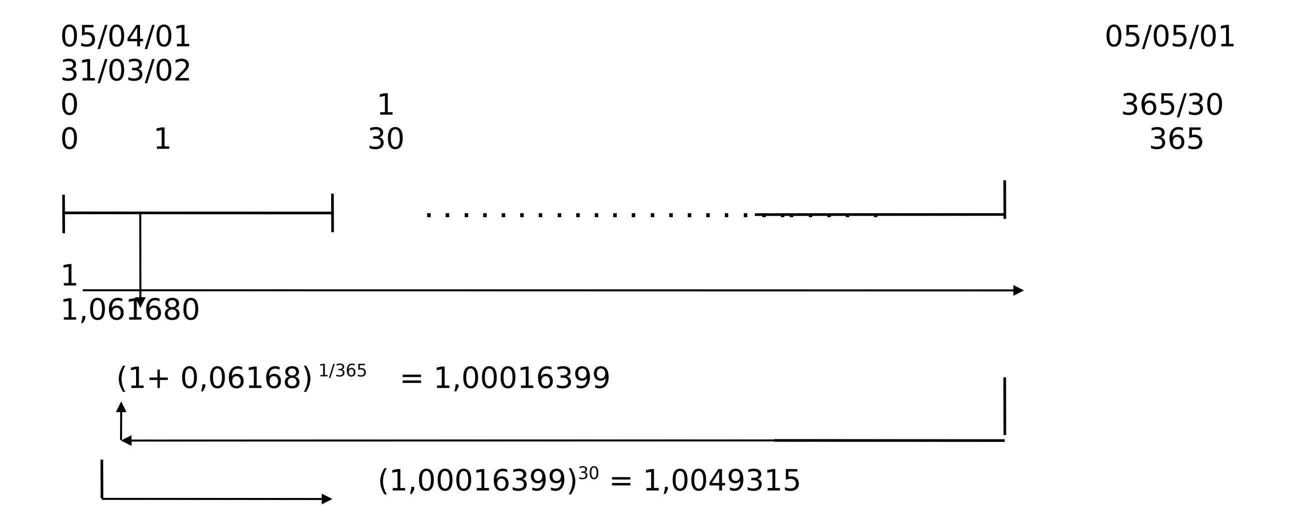
$$i_{(30)} = (1 + 0{,}00016399)^{30} - 1 = 0{,}0049315$$

Es evidente que:

$$(1 + 0{,}061680)^{30/365} - 1 = [(1 + 0{,}061680)^{1/365}]^{30}$$

y ésta fue la única transformación utilizada.

Gráficamente, se tiene:



La noción de tasa equivalente puede servirnos para comparar nuevamente las tasas nominales anuales de interés del 6% para el plazo de 30 días y del 6,10% para el plazo de 60 días del apartado precedente.

Recordemos que las tasas vigentes en cada período eran:

para el período de 30 días $\frac{0,06 \ . \ 30}{365} = 0,0049315$ ó 0,49315%

y para el de 60 días: $\frac{0,061 \ . \ 60}{365} = 0,0100274$ ó 1,00274%

Si la comparación se efectúa a 60 días, la tasa efectiva a 60 días correspondiente a 0,0049315 es:

$i_{(60)} = (1 + 0,0049315)^{60/30} - 1 = 0,009887$ ó 0,9887% que es inferior a 1,00274%.

Si la comparación se efectúa a 30 días, la tasa equivalente de 30 días correspondiente a
0,0100274 es:

$i_{(30)} = (1 + 0,0100274)^{30/60} - 1 = 0,0050012$ ó 0,50012% que es superior a 0,49315%

Si ahora la comparación se efectúa considerando la tasa equivalente diaria resulta:

Para la tasa a 30 días

$$(1 + 0,0049315)^{1/30} - 1 = 0,00016399 \text{ ó } 0,016399\%$$

Para la tasa a 60 días

$(1 + 0{,}0100274)^{1/60} - 1 = 0{,}00016630$ ó 0,016630% que es superior a la anterior.

La comparación se puede extender a cualquier período obteniéndose análogos resultados. Ello se explica porque en todos los cálculos, explícita o implícitamente, ha intervenido la tasa equivalente diaria que representa el rendimiento de un capital unitario en la unidad de tiempo (el día) y al hecho que, en virtud de las reglas del interés compuesto, el rendimiento es constante cualesquiera sea el período considerado . Entonces como los valores finales resultan iguales, no importa cuál es el momento elegido para efectuar la comparación.

5.3 Transformación de la tasa equivalente o efectiva de interés en tasa nominal anual de interés

En el punto 5.1. se obtuvo la tasa vigente en el período de m días a partir de la tasa nominal anual de interés mediante:

$$\frac{j_{(m)} \; . \; m}{365}$$

El problema que ahora se nos plantea es inverso del anterior: dada la tasa correspondiente al período, en este caso la tasa equivalente, $i_{(m)}$, se trata de determinar la tasa nominal anual de interés. Es inmediato que:

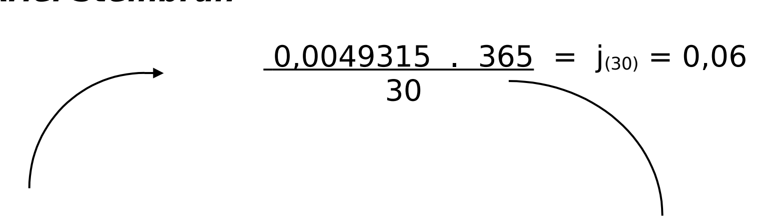
$$j_{(m)} = \frac{i_{(m)} \; . \; 365}{m}$$

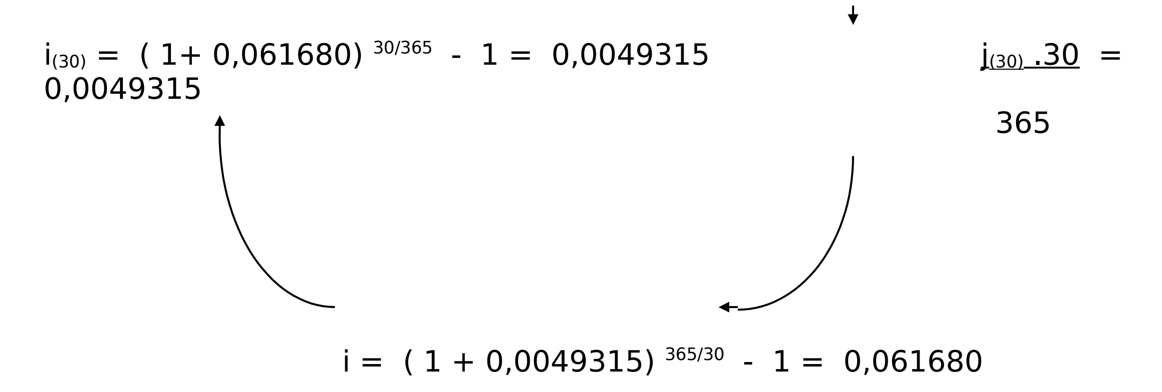
Así, por ejemplo si la tasa vigente para el plazo de 30 días es 0,0049315 resultará:

$$j_{(30)} = \frac{0{,}0049315 \; . \; 365}{30} = 0{,}06$$ ó 6% anual que fue nuestro punto de partida

Los resultados anteriores relativos a la tasa de interés nominal del 6% anual pueden ser visualizados mediante el siguiente diagrama:

$$\frac{0{,}0049315 \; . \; 365}{30} = j_{(30)} = 0{,}06$$



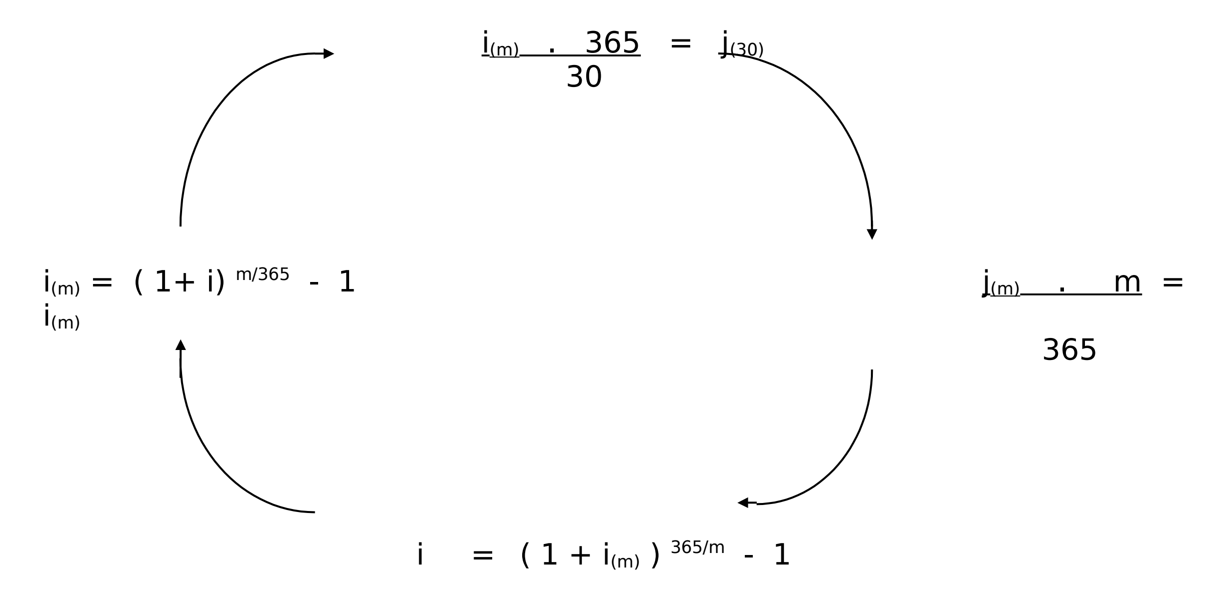


$i_{(30)} = (1 + 0{,}061680)^{30/365} - 1 = 0{,}0049315$

$\frac{j_{(30)} \cdot 30}{365} = 0{,}0049315$

$i = (1 + 0{,}0049315)^{365/30} - 1 = 0{,}061680$

O bien genéricamente, para un plazo de m días:



$\frac{i_{(m)} \cdot 365}{30} = j_{(30)}$

$i_{(m)} = (1 + i)^{m/365} - 1$

$\frac{j_{(m)} \cdot m}{365} = i_{(m)}$

$i = (1 + i_{(m)})^{365/m} - 1$

Obsérvese que de la tasa nominal anual se “sale” o se “entra” mediante una proporción; a la tasa efectiva anual se “entra” o se “sale” también proporcionando, pero en este caso en el exponente.

Cuando se pasa de un período más pequeño a uno más grande el factor o el exponente, se debe expandir, este debe ser 365/m; si se pasa de un período más grande a uno más pequeño se debe contraer: el factor o el exponente y debe ser m/365 (con m < 365).

Se comenta una vez más que la única comparación válida entre tasas correspondientes a distintos plazos es la que se efectúa mediante las reglas del interés compuesto, que como hemos visto, conduce a que la comparación se realice mediante las tasas efectivas de las operaciones; esto es, aquellas tasas que efectivamente estuvieron vigentes independientemente del hecho que hubieran sido incorporadas o no a los respectivos contratos. En este sentido, son las únicas tasas que hacen posible evaluar rendimientos y la determinación

de las mismas garantiza que éstos sean además de comparables, transparentes y explícitos.

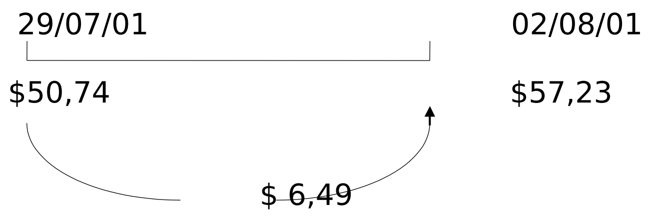
Por último, queremos mencionar algunas particularidades acerca de las denominaciones de las tasas. Las tasas proporcionales correspondientes a un período dado obtenidas a partir de la nominal anual son tasas efectivas y también lo son las tasas equivalentes correspondientes a ese mismo período. Por ejemplo, 0,0049315 para el plazo de 30 días es una tasa efectiva mensual (porque se aplica en ese período), ya sea que fuera obtenida proporcionando a partir de la nominal anual (6%) o bien como tasa equivalente, a partir de la efectiva anua (6,168%). Con esto queremos significar que el hecho de ser tasa proporcional no excluye el hecho de ser tasa efectiva como a veces cierta literatura propone. También una tasa nominal puede ser una tasa efectiva, como por ejemplo si se pacta el 6,5% nominal anual para un depósito a un año de plazo. En cambio, esa tasa nominal no es efectiva si el plazo de la operación es inferior al año.

Esto significa que las tasas pueden poseer más de una característica de las que hemos mencionado y este hecho debe ser tenido siempre en cuenta, considerando siempre si además de ser equivalente, nominal o proporcional se trata de una tasa efectiva o no.

5.4. Ejercicios.

1. Un individuo recibe su factura por el servicio de energía eléctrica en la que consta que a la fecha de vencimiento, 29/07/01, su deuda es de $ 50,74. En la misma factura se prevé un segundo vencimiento que opera el 02/08/01, siendo a esa fecha el importe adeudado $ 57,23. ¿Qué tasa efectiva mensual de interés está cobrando la empresa?

Resolución:



Para hacer frente al segundo vencimiento necesito obtener $ 6,49 de interés, la tasa de la operación, por consiguiente, surge de la siguiente relación:

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Interés}}{\text{Capital Inicial}} = \frac{6,49}{50,74} = 0,12791$$

El rendimiento de la operación es del 12,791% para el plazo de 4 días. Si quiero saber la tasa efectiva mensual, debo hallar la tasa para 30 días equivalente a ese rendimiento, para lo cual efectúo el siguiente cálculo:

$$i_{30} = (1 + 0,12791)^{30/4} - 1 = 1,4663$$

<u>Respuesta:</u> La empresa cobra el 146,63% efectivo mensual para poder hacer frente a mi deuda.

2. Hallar la tasa diaria equivalente a un rendimiento del 14,8% anual efectivo.

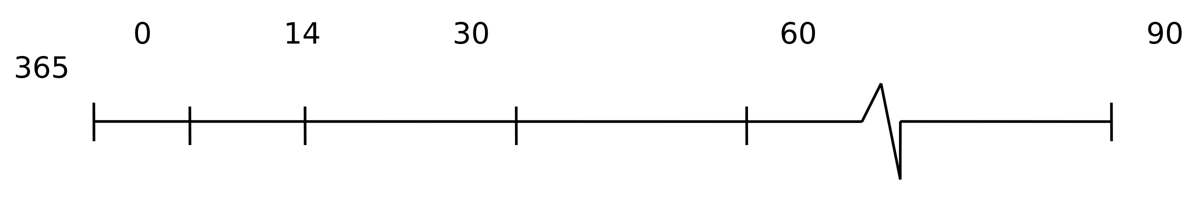
$$I_1 = (1,148)^{1/365} - 1 = 0,003782$$

<u>Respuesta</u>: la tasa efectiva diaria es 0,0003782 o sea el 0,03782%.

3. En una operación a plazo fijo a 14 días se ha pagado una tasa nominal anual del 11%. Calcular la tasa nominal anual para 30, 60 y 90 días si se pretende para cada caso un rendimiento equivalente

Cálculo de la tasa nominal anual para 30 días:

Volcamos los datos en un eje de tiempo:



$j_{14} = 0,11$

$i_{14} = ?$

$I_{30} = ¿$

$j_{30} = ¿$

La tasa nominal anual para 14 días $j_{14} = 0,11$

Hallamos la tasa para el plazo de 14 días :

$$i_{14} = \frac{j_{14} \times 14}{365} \qquad i_{14} = \frac{0,11 \times 14}{365} = 0,004219178$$

Luego, hallamos la tasa equivalente para el plazo de 30 días:

$$i_{30} = (1 + i_{14})^{30/14} - 1 =$$

$$i_{30} = (1 + 0{,}004219178)^{30/14} - 1 =$$

$$i_{30} = 0{,}0090629$$

Ahora estamos en condiciones de obtener la tasa nominal anual para el plazo de 30 días:

$$j_{30} = \frac{i_{30} \times 365}{30}$$

$$j_{30} = 0{,}1102652$$

En el caso de los 60 días de plazo se tiene: $i_{60} = (1 + i_{14})^{60/14} - 1 =$

$$i_{60} = (1 + 0{,}004219178)^{60/14} - 1 = 0{,}0182079$$

$$j_{60} = \frac{i_{60} \times 365}{60}$$

$$j_{60} = 0{,}1107647$$

De manera análoga se calcula la tasa nominal anual para el plazo de 90 días.

El ejercicio también se puede resolver calculando la tasa efectiva anual y a partir de esta tasa se puede calcular la nominal anual para cada plazo. Nosotros calcularemos solo la que corresponde a 30 días de plazo.

La tasa efectiva anual, calculada a partir de la tasa que corresponde al plazo de 14 días es:

$$TAE = (1 + 0{,}004219178)^{365/14} - 1 = 0{,}1160198$$

$$i_{30} = (1 + 0{,}1160198)^{30/365} - 1 = 0{,}0090629$$

Este resultado es idéntico al hallado anteriormente. Así que :

$$j_{30} = \frac{i_{30} \times 365}{30}$$

$$j_{30} = 0{,}1102652$$

Respuestas:
Tasa nominal anual para 30 días = 0,1102652 ó sea 11,02652%
Tasa nominal anual para 60 días = 0,1107647 ó sea 11,07647%
Tasa nominal anual para 90 días = 0,1112682 ó sea 11,12682%

4. El Banco WW publica el siguiente aviso:

El Banco WW ofrece:

Depósitos a Plazo Fijo

PLAZOS	TNA	TEM
30 a 59 días	6,20%	0,51 %
60 a 89 días	7,08%	0,58 %
90 días o más	7,96%	0,70 %

Se desea confirmar si la columna correspondiente a las Tasas Efectivas Mensuales está bien calculada

b) Si deseo comparar las tasas correspondientes a los distintos plazos de cuál de las dos columnas debo obtener la información. Justificar la respuesta.

Consideremos el plazo de 30 a 59 días. Utilicemos el plazo menor para calcular las tasas efectivas mensuales, en este caso 30 días.

$$i_{30} = \frac{j_{30} \times 30}{365} \qquad i_{14} = \frac{0,0620 \times 30}{365} = 0,00509589$$

Este resultado concuerda con el 0,51% publicado.

Para el caso de 60 a 89 días la tasa efectiva mensual resulta:

$$i_{60} = \frac{j_{60} \times 60}{365} \qquad i_{60} = \frac{0,0708 \times 60}{365} = 0,01163836$$

Esta es la tasa efectiva para el plazo de 60 días. La tasa efectiva para 30 días resulta de:

$$i_{30} = (1 + 0,01163836)^{30/60} - 1 = 0,00580235$$

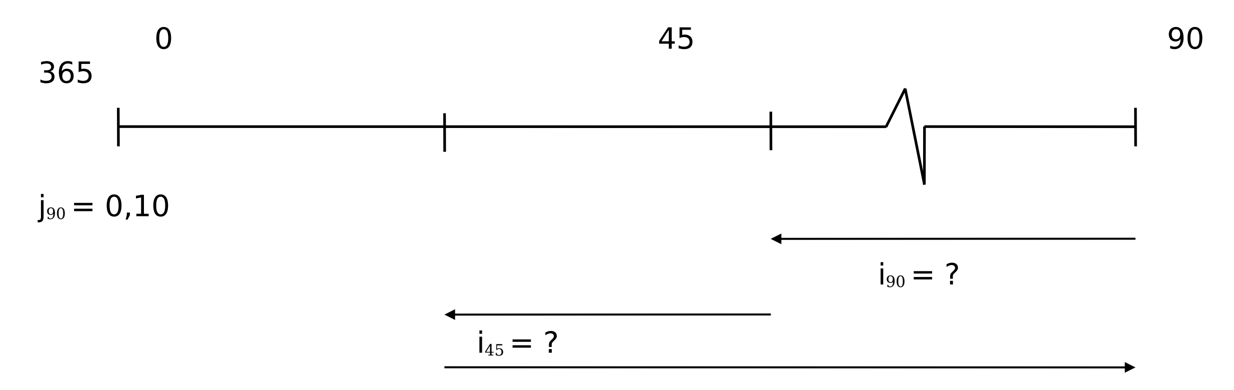
Esta tasa coincide con la tasa publicada. Sin embargo, el lector puede comprobar que la tasa efectiva mensual para el plazo de 90 días está mal calculada.

a) No, la tasa efectiva mensual correspondiente al plazo de 90 días es 0,65%.

b) Debo comparar la columna de TEM, ya que la comparación la debo hacer con tasas calculadas sobre la base de una unidad de medida homogénea y esto lo consigo con las reglas del interés compuesto comparando tasas efectivas, en este caso referidas a 30 días.

5. La tasa nominal anual de interés para el plazo de 90 días es del 10%, se desea hallar la correspondiente tasa nominal anual de interés para el plazo de 45 días

Volcamos los datos en un eje de tiempo:



$j_{45} = ?$

Hallamos la tasa efectiva para el plazo de 90 días :

$$i_{90} = \frac{j_{90} \times 90}{365}$$

$$i_{90} = \frac{0,10 \times 90}{365}$$

$$i_{90} = 0,0246575$$

Luego, hallamos la tasa equivalente para el plazo de 45 días:

$i_{45} = (1 + i_{90})^{45/90} - 1 =$

$$i_{45} = (1 + 0,0246575)^{45/90} - 1 =$$

$$i_{45} = 0,0122537$$

Ahora estamos en condiciones de obtener la tasa nominal anual para el plazo de 45 días:

$$j_{45} = \frac{i_{45} \times 365}{\quad}$$

$$j_{45} = 0{,}099391$$

Respuesta: La tasa nominal anual de interés para 45 días de plazo es 0,099391 ó sea 9,9391%

6. Una persona dispone de $ 60.000 por el plazo de 90 días y puede invertirlos de la siguiente manera:

a) un depósito por 30 días al 12% contractual anual, renovándolo por dos períodos más.

b) Un depósito por 90 días al 12,5% contractual anual.

Determinar: 1) ¿Cuál es la alternativa más conveniente?
2) ¿Cuál debe ser la tasa de interés nominal anual para el plazo de 30días que se hubiera aplicado en la alternativa a) para que esta sea equivalente a la tasa de la alternativa b)?

La comparación a que se refiere la primer pregunta se puede efectuar en diferentes plazos; nosotros elegimos el de 90 días.

En la alternativa b) la tasa efectiva de 90 días es:

$$i_{90} = \frac{j_{90} \times 90}{365} \qquad i_{90} = \frac{0{,}125 \times 90}{365} = 0{,}03082192$$

La tasa efectiva de 30 días es:

$$i_{30} = \frac{j_{30} \times 30}{365} \qquad i_{30} = \frac{0{,}12 \times 30}{365} = 0{,}00986301$$

La tasa efectiva para 90 días es: $i_{90} = (1 + 0{,}00986301)^{90/30} - 1 = 0{,}02988182$

Respuesta: 1) La alternativa más conveniente es la **a)**

Para que la alternativa a) sea equivalente a la b) la tasa efectiva para el plazo de 90 días debe ser 0,03082192. Luego, la tasa efectiva mensual resulta:

$i_{30} = (1 + 0,03082192)^{30/90} – 1 = 0,0101702$

Entonces, **2)** La tasa nominal anual es 0,0101702* 365 / 30 = 0,123737.

7. Si el día 24/07/01 deposité $ 6.800 y el 23/08/01 obtuve $ 6.880 de valor final.

a) ¿Cuál es la tasa de interés para ese plazo? **b)** ¿Cuál es la correspondiente tasa efectiva anual, y nominal anual?

Entre esas fechas median 30 días así que la tasa efectiva correspondiente es:

$$i_{30} = 80 / 6800 = 0,0117647.$$

Respuesta: a) La tasa del plazo es 0,0117647 ó sea 1,17647%

b) La tasa efectiva anual es:

$$TAE = (1,0117647)^{365/30} = 0,152924 \text{ ó sea } 15,2924\%$$

y la nominal anual es 0,143137 ó sea 14,3137%.

8. El 25 de enero de 2001 deposité $2500 por 45 días de plazo siendo la tasa el 8% nominal anual; al vencimiento renové la operación (sin retirar los intereses) por 65 días más. En este caso la tasa de interés fue el 8,25% efectivo anual. Se desea saber: a) la fecha de vencimiento de toda la operación, b) qué suma retiré al vencimiento y c) la tasa efectiva anual de toda la operación
Para determinar la fecha de vencimiento de la operación hay que contar 110 días a partir del 25 de enero de 2001 (este día se cuenta). El vencimiento ocurre el 15 de mayo de 2001 ya que al finalizar el 14 de mayo habrán transcurrido 110 días.

La pregunta b) se contesta mediante:

$$C_{110} = 2.500 (1 + 0,08 * 45 / 365) * (1,0825)^{65/365} = 2560,55$$

La tasa efectiva para el plazo de 110 días es: i_{110} = 60,55 / 2500 =0,02422. Por lo tanto la tasa efectiva anual resulta:

$$TAE = (1,02422)^{365/110} - 1 =0,082647.$$

9. La tasa de interés nominal anual para el plazo de 180 días es 6,50%. Cuáles deben ser la tasa efectiva mensual y la tasa nominal anual correspondientes al plazo de 60 días de modo que ambas tasas, la de 180 días de plazo y la de 60 días, tengan el mismo rendimiento.

La comparación debe hacerse mediante las tasas efectivas. La de 180 días de plazo es:

$$i_{180} = 0,065 * 180 / 365 = 0,0320548.$$

Entonces la tasa equivalente (y efectiva) mensual debe ser:

$$i_{30} = (1 + 0,0320548)^{30/180} – 1 = 0,0052725$$

La tasa efectiva para el plazo de 60 días es:

$$i_{60} = (1 + 0,0052725)^{60/30} – 1 = 0,0105728.$$

La tasa nominal anual para el plazo de 60 días es:

$$j_{60} = 0,0105728 * 365 / 60 = 0,064318.$$

10. A qué plazo, expresado en días, estuvo colocado un capital de $4500 si produjo $41,28 de interés siendo la correspondiente tasa el 8,25% efectivo anual?

$$I_m = 4500 [(1 + 0,0825)^{m/365} – 1] = 41,28.$$

$$m = 365 * \log [1 + (41,28 / 4500)] / \log 1,0825 = 42 \text{ días}.$$

11. A qué plazo, expresado en días, estuvo colocado un capital de $4500 si produjo $41,70 de interés siendo la correspondiente tasa el 8,45% nominal anual?

$$I_m = 4500 [0,0845 * m / 365] = 41,70 .$$

$$m = 365 * [41,70 / 4500] / 0,0845 = 40 \text{ días}.$$

12. Cuál es la tasa nominal anual a la que estuvo colocado un capital de $3.500 si produjo $29,04 de interés durante un plazo de 65 días?

$$I_{65} = 3500 * j_{65} * 65 / 365 = 29,04$$

$$j_{65} = (29,04 / 3500) * (365 / 65) = 0,0465916$$

13. Cuál es la tasa efectiva anual a la que estuvo colocado un capital de $3.500 si produjo $32 de interés durante un plazo de 65 días?

$$I_{65} = 3500 * [(1 + TAE)^{65/365} - 1] = 32$$

$$TAE = (1 + 32 / 3500)^{365/65} - 1 = 0,05243590$$

14. En qué condiciones la tasa nominal anual de interés es también una tasa efectiva de interés?

Respuesta: cuando el plazo de la operación es un año.

15. Cuáles son las semejanzas y las diferencias entre la tasa proporcional y la tasa equivalente correspondiente a un plazo dado?

Respuesta: Ambas tasas son numéricamente iguales, la tasa denominada proporcional se obtiene a partir de la tasa nominal anual, la equivalente de la efectiva anual. Ambas, la proporcional y la equivalente, son tasas efectivas para el plazo dado.

16. Cuándo se debe utilizar la tasa proporcional y cuándo la equivalente?

Respuesta: Depende de los datos que constituyan el punto de partida: si uno dispone de tasas nominales anuales obtendrá tasas proporcionales, si uno dispone de tasas efectivas anuales obtendrá tasas equivalentes. Si uno está en condiciones de fijar una tasa y elige la efectiva anual entonces cualesquiera sea el número de capitalizaciones de las tasas equivalentes para distintos plazos obtendrá una única tasa efectiva anual; en cambio, si uno fija una tasa nominal anual, la capitalización para distintos plazos de las respectivas tasas proporcionales conducirán a distintas tasas efectivas anuales.

17. Cuál es la vigencia de la tasa efectiva anual?

Respuesta: Sirve básicamente para propósitos de comparación, constituye una medida homogénea del rendimiento, lo que no puede lograrse mediante las tasas nominales anuales. También resulta muy útil cuando se desea establecer un nivel máximo a la tasa de interés ya que basta con fijar solo una tasa efectiva anual; en cambio si este nivel máximo fuera fijado mediante las tasas nominales anuales habría que fijar una tasa para cada plazo posible o imaginable, en caso contrario se puede violar fácilmente este nivel máximo.

A comienzos de la década del 70 el Banco Central fijaba un máximo a la tasa de interés que cobraban los bancos, alrededor del 40% nominal anual. Si un banco prestaba a un año de plazo la tasa efectiva anual era de 40%, pero si prestaba a 30 días la tasa efectiva anual era $(1 + 0{,}40 / 12)^{12} – 1 = 0{,}482126$ ó 48,21% superando con creces el límite impuesto por la autoridad monetaria.
Hacemos notar que hemos utilizado el divisor fijo 360 en consonancia con la costumbre de aquella época.

18. Si el punto de partida es una tasa subperiódica, (denominación que a veces se da a las tasas menores que el año, a cuya tasa se le reserva el nombre de tasa periódica) por ejemplo de 30, 45, 60, etc., días, qué es preferible, obtener tasas nominales anuales o tasas efectivas anuales?

Respuesta: Si se obtienen tasas efectivas anuales estas pueden aplicarse a cualquier plazo y las tasas resultantes tendrán el mismo rendimiento anual. Si

a partir de la tasa subperiódica se obtiene una tasa nominal anual, esta regirá solo para el plazo considerado, en este sentido su alcance puede ser más limitado. Sin embargo, también hay que reconocer que conlleva cálculos matemáticos más sencillos manejar una tasa nominal anual que una efectiva anual, aunque esto no debe ser obstáculo para lograr mayor claridad en los procedimientos.

19. Por qué si en un período rige una tasa de interés, digamos el 3% mensual, en dos períodos semejantes, un bimestre o 60 días, la tasa efectiva de interés no es, en general, del 6%?

Respuesta: Porque ello implicaría retrotraer la discusión a la inconveniencia de utilizar la proporcionalidad, característica del interés simple. Una tasa de interés es un interés generado por los servicios que presta un capital durante un cierto tiempo y como tal se halla incluido en la discusión acerca de la manera que los regímenes de interés simple y de interés compuesto pueden medir el rendimiento de las operaciones financieras. Por ejemplo, no puede ser del 6% porque no toma en cuenta la reinversión de los intereses y, en este caso la tasa de interés para 60 días resultará: $(1{,}03)^{2} - 1 = 0{,}0609$ ó 6,09%.

Esta argumentación muestra también por qué para pasar de una tasa subperiódica a otra es menester efectuar los cálculos mediante tasas efectivas empleando las reglas del interés compuesto. En el único caso en que esa proporcionalidad es válida es cuando se pasa de la tasa subperiódica a la tasa nominal anual (o viceversa) dado que la costumbre y la comunidad financiera institucionalizó esa manera de proceder.

20. La tasa de interés puede ser considerada como un precio?

Respuesta: De hecho así se hace en Economía. El tipo de interés es un precio relativo, ya que mide la relación entre dos precios monetarios, el precio de una mercancía consumida hoy y el precio de la misma mercancía consumida en una fecha futura. Es, desde este punto de vista, el precio que un agente económico está dispuesto a obtener por posponer consumos presentes para efectuar consumos futuros; en forma sintética, el precio que un agente económico desea obtener por sus ahorros.

21. Conoce alguna operación de magnitud en la que la tasa nominal de interés fue negativa o nula?

Respuesta: En noviembre de 1998 en Japón algunos inversores compraron bonos con rendimientos negativos, es decir, pagaban más por un valor final menor y algunos bancos pagaban intereses para que los clientes tomaran dinero prestado.

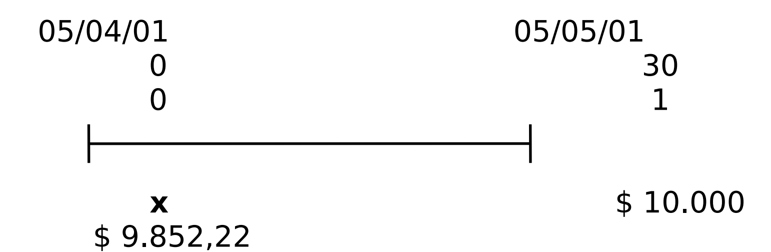
CAPÍTULO 6. TASAS ABONADAS POR PERÍODO ADELANTADO. (TASAS ADELANTADAS O DE DESCUENTO).

Cuando los intereses se abonan al inicio de la operación, las tasas que se aplican para determinar la cuantía de los mismos se denominan tasas adelantadas o de descuento. Se utilizan, en general, en las operaciones de préstamos, aunque ahora en forma bastante limitada.

Así, por ejemplo, si el 05/04/01 se prestan $ 10.000 a 30 días de plazo y se conviene que se cobrará el 1,5% mensual por adelantado, entonces una de las formas posibles de efectuar la operación es la siguiente: en esa fecha se presta una suma de dinero tal que colocada al 1,5% mensual sea igual - al finalizar el plazo- a $ 10.000. Este procedimiento determina que la suma resultante - que es la que recibe el deudor- goza de un interés del 1,5% mensual. En nuestro ejemplo, si se denomina **x** a esa suma se tendrá:

$$x \;.\; 1{,}015 = \$\,10.000, \text{ es decir, } x = \frac{\$\,10.000}{1{,}015} = \$\,9.852{,}22$$

A continuación se muestra un esquema del procedimiento:



En esta operación intervienen tres sumas de dinero $ 9.852,22, $ 10000 y la diferencia entre ambas $ 147,78.

Se puede observar que:

$$\$\,9.852{,}22 \;.\; 0{,}015 = \$\,147{,}78 \text{ o bien que } 9852{,}22 \;.\; 1{,}015 = \$\,10.000,$$

Esto significa que si consideramos la operación analizada desde el 05/04/01, cada uno de los pesos que conforman la suma de $ 147, 78 se comporta como una masa de intereses, con respecto a un capital de $9.852,22. Estos intereses serán abonados el 05/05/01, al finalizar la operación. Representa una operación de pago por período vencido.

Pero si el análisis se efectúa a partir de cada uno de los pesos que conforman la suma de $ 10.000, los intereses pueden ser vistos como descontados de esa cantidad (o abonados por adelantado) el 05/04/01 y de esta manera la operación se convierte en una de intereses abonadas por período adelantado o simplemente de descuento.

Esta forma de interpretar la operación es que sobre los $ 10.000 que se prestan (aun cuando nunca se entregan), se descuentan $ 147,78 al inicio del período, para hacer recaer sobre el deudor el compromiso de abonar $ 10.000 al finalizar el mismo.

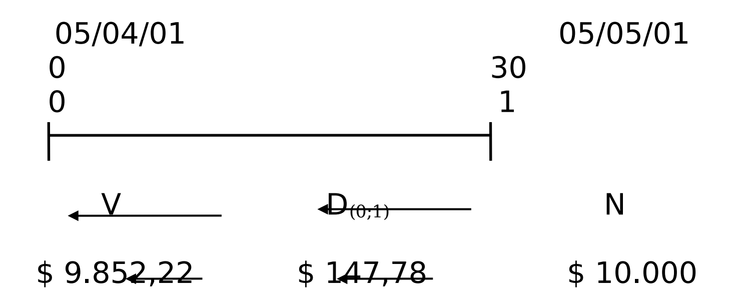
Se puede concluir entonces que los intereses abonados por período vencido y las operaciones denominadas de descuento o abonadas por período adelantado son simplemente dos formas distintas de evaluar una misma operación: si el análisis se realiza partiendo de los capitales iniciales, los valores finales incluirán intereses que serán vistos como abonados por período vencido; por el contrario, si el punto de partida son los valores finales, los capitales iniciales aparecerán menguados en una cantidad que será vista como un descuento o un interés que se abonó al comienzo de la operación.

En consecuencia, se distinguen las tasas aplicadas en ambas operaciones: denominándose tasas vencidas o simplemente de interés a las primeras y tasas de descuento o adelantadas a las últimas. En este capítulo nos ocuparemos principalmente de las operaciones de descuento, de las tasas derivadas de estas operaciones y analizaremos su relación con las tasas vencidas.

6.1 Valor nominal. Valor actual. Descuento. Actualización. Tasa de descuento.

Si bien las operaciones financieras de pago único como las que aquí consideramos se caracterizan por la relación entre un capital inicial, un valor final y una diferencia entre estos valores, denominada interés o descuento, de acuerdo con el punto del tiempo desde el cual se analiza la operación, en este punto adoptaremos la tesitura de enfocar las operaciones como si fueran de descuento, esto es considerando que los intereses se abonan por período adelantado.

En la literatura financiera se suele dar una denominación diferente de la que se emplea en las operaciones de depósito a los capitales que intervienen en las operaciones de descuento. El capital inicial, se lo suele denotar mediante la letra V y se denomina valor actual o presente (por oposición al valor final y por el hecho de que es una suma disponible en el momento en que se efectúa la operación); el valor final que se denota mediante la letra N, se denomina valor nominal - en correspondencia con los montos que figuran en los documentos relativos a los préstamos -. A la diferencia entre el valor nominal y el valor actual se la denomina descuento y es denotada mediante la letra D. Esto es: $N - V = D$. El esquema gráfico de la operación del punto anterior resulta:



Obsérvese que la operación puede ser vista como si se hubiera invertido el sentido del tiempo porque si se

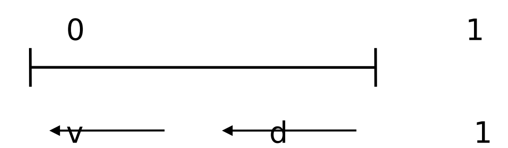
la analiza como operación de descuento la fecha de partida es el 05/05/01. Notemos también que la
operación en sí es neutra con respecto a la fecha desde la cual se efectúa el análisis: siempre habrá un capital inicial, un valor final y una diferencia entre ambos valores. Así que puede ser considerada como una operación de interés o una operación de descuento; el analista decide que criterio elegirá.

Sin embargo, en la práctica financiera esto no es tan concluyente porque por lo general las características de los contratos, básicamente los contratos de préstamos, incluyen cláusulas que implican la modalidad de la operación y sugieren la forma más conveniente de evaluarla.

En las operaciones de descuento hay un proceso de transformación de los valores nominales (o finales) en valores actuales o presentes ya que el dato de la operación es, por lo general, la suma que se devolverá al vencimiento y constituye la incógnita la suma que percibirá el deudor en el momento presente. Este proceso de transformación de valores finales en presentes, se denomina genéricamente de actualización y representa la contrapartida del proceso de capitalización. Consiste en deducir el descuento a los valores nominales y esta deducción se efectúa mediante la acción del tiempo y de la tasa de interés ya sea que ésta se considere como abonada por período adelantado o bien, por período vencido.

También, como en la capitalización, los valores actuales y los nominales son exigibles en un cierto punto del tiempo y el descuento es generado durante el transcurso del período. En tanto que aquellos pueden ser consideradas como variables “stock” -existentes en un momento dado- el descuento puede ser considerado como un “flujo” y por eso fue denotado en la gráfica con la adición de los argumentos que corresponden al inicio y al fin del período: 0 y 1 respectivamente. Aunque en el texto se prescindirá de los argumentos si no son necesarios para la explicación.

Cuando se trate de un capital unitario el valor actual será denotado mediante ”v“ y el descuento correspondiente mediante “d”. De esta forma:



Se puede apreciar que d es el descuento que corresponde a una unidad de valor nominal en la unidad de tiempo (o de período) y es, por consiguiente, la tasa de descuento.

Con referencia al ejemplo que hemos considerado; para determinar la tasa de descuento, d, se puede razonar así: si por $ 10.000 de préstamo el descuento fue $147,78, esto significa que por $1 de préstamo el descuento, d, será:

$$d = \frac{147{,}78}{10.000} = 0{,}014778 \text{ ó bien: } 1{,}4778\%.$$

La fórmula precedente expresa la relación:

$d = \frac{D}{N}$, así que: $D = N \,.\, d$ Esto significa que la operación de préstamo se podrá haber planteado de la siguiente manera: ¿Cuál será el valor actual que corresponde a un préstamo de $ 10000 por 30 días si la tasa de descuento es 1,4778% al mes?

En cuyo caso:

$$D = N \,.\, d = \$\,10.000 \times 0{,}014778 = \$147{,}78$$

Así que :

$$V = N - D = N - N \,.\, d = N\ (1 - d),$$

de modo que en esta última expresión aparece el valor actual como el producto del valor nominal por un factor de actualización: (1 - d).

Si se tratara de un valor nominal unitario, es decir N = 1 se sigue que, v, el valor actual correspondiente resulta:

$$v = 1 - d \quad (6.1.1).$$

6.2. Relaciones entre las tasas abonadas por período adelantado y las abonadas por período vencido

El ejemplo que estamos considerando ha puesto en evidencia que el descuento de la operación; $ 147,78, ha sido calculado de dos maneras distintas: a) mediante la aplicación de la tasa de interés, i = 0,015 al valor actual $ 9.852,22 ó , b) mediante la aplicación de la tasa de descuento d = 0,014778 al valor nominal $ 10.000. Esto significa que debe existir una relación de equivalencia entre ambas tasas i y d, esto es, la tasa abonada por período vencido y la tasa abonada por período adelantado o de descuento. Esta relación puede ser obtenida mediante distintos razonamientos alternativos. Algunos de ellos serán expuestos a continuación:

1. El valor actual capitalizado un período produce el valor final o valor nominal N, esto es: $V(1 + i) = N$ Por otra parte, como tanto la tasa i aplicada a V como la tasa d aplicada a N producen el mismo descuento D resulta que: $V \cdot i = N \cdot d$, entonces, si en esta última expresión se reemplaza N por $V(1 + i)$ se sigue que : $V \cdot i = V(1 + i) \cdot d$; simplificando V queda:

$$i = (1 + i) \cdot d \quad \text{ó bien } d = \frac{i}{1 + i} \qquad (6.2.1)$$

Esta fórmula expresa que d, la tasa de descuento no es más que el valor actual de la tasa
de interés, siendo $1 / (1 + i)$ el factor de actualización.
Esto se puede expresar gráficamente de la manera siguiente:

0 1

$d = \frac{i}{1 + i}$ ← i

En el ejemplo considerado : $d = \frac{0,015}{1+0,015} = 0,014778$

2. Habíamos visto en el punto 6.1 que si al valor nominal unitario se le deducía el valor actual se obtenía el descuento, d, de la operación, es decir: $d = 1 - v$; por consiguiente, es $v = 1 - d$.
Gráficamente se puede expresar así:

0 1

v = 1 - d ← d 1

Ahora bien, si se invierte el sentido del tiempo y se lo orienta en la dirección acostumbrada se puede considerar la operación como una de capitalización y se

puede concluir que el interés ganado es d (la diferencia entre 1-d y 1), con relación a un capital inicial (valor actual) 1 - d. Por consiguiente, la tasa de interés, i, relación entre el interés ganado d, y el capital inicial es:

$$i = \frac{d}{1 - d} \qquad (6.2.2)$$

En el ejemplo que estamos tratando :

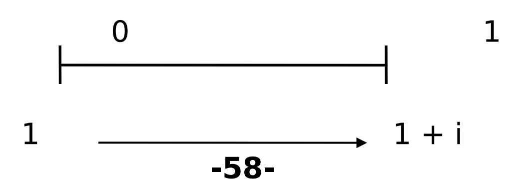
$$i = \frac{0{,}014778}{1 - 0{,}014778} = 0{,}015$$

La relación precedente, i = d / (1 – d) también se puede deducir de d = i / (1 + i). En efecto; de esta última se sigue que: d (1 + i) = i ó bien d + di = i, esto entonces resulta: d = i - di; de donde d = i (1 - d) y por último i = d / (1- d) .

3. Tal vez el razonamiento más sencillo para determinar las relaciones entre i y d sea el
que sigue a continuación:
Genéricamente un capital inicial unitario produce al finalizar el plazo un valor

final (1 + i).

En forma gráfica:



Desde el punto de vista matemático la capitalización por un período se traduce en multiplicar el capital inicial unitario por 1 + i. Ahora bien, si se invierte el sentido del tiempo y se considera un proceso de actualización, el valor final (nominal) (1 + i) se ha transformado en un valor inicial (actual) de 1. Matemáticamente, para hacer esa transformación hay que dividir el valor final por (1 + i) para obtener el capital unitario y por consiguiente el factor de actualización por un período es 1 / (1 + i).

Como entre la tasa de interés adelantada, d, y la tasa de interés vencida, i , media un período de capitalización, se sigue que d es el valor actual de i (o bien i es el valor final de d) y puesto que el factor de actualización es 1/ (1 + i) resulta: d = i / (1 + i).

Si el razonamiento se efectúa a partir del valor final se sigue que d (1 + i) = i

0 1

$\frac{1}{1+i}$ ⟵ 1

es decir , se obtiene el valor actual unitario que habíamos denotado mediante v. Resulta:

$v = \frac{1}{1+i}$. , el factor de actualización puede denotarse mediante v o mediante 1 / (1 + i).

Entonces la fórmula (6.2.1) puede escribirse como: d = [1 / (1 + i)] i = v . i.

En nuestro ejemplo:

$v = \frac{1}{1+0,015}$ = 0,985222, e i = 0,015, así que d = 0,015 . 0,985222 = 0,014778

Análogamente, si se actualiza el valor nominal, N ,se obtiene V y como el factor de actualización es v = 1 / (1 + i).

resulta que: $V = N \; . \; v = \frac{N}{1+i}$. Gráficamente:

0 1

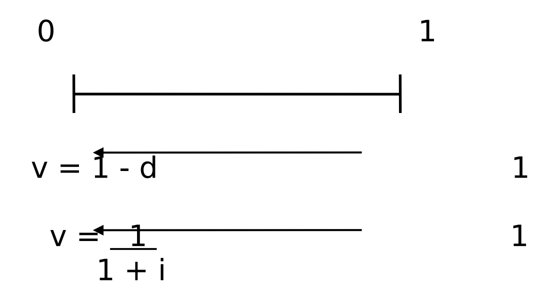
$V = \frac{N}{1+i}$ ⟵ N

En el ejemplo v = $ 10.000 / (1 + 0,015) = $ 9.852,22.

O bien V = $ 10.000 . 0,985222 = $ 9.852,22.

También habíamos visto (6.1.1) que v = 1 - d y teniendo en cuenta que v = 1/ (1 + i) se sigue que :

$$1 - d = \frac{1}{1+i}$$ (6.2.3). Gráficamente:



La expresión precedente (6.2.3) pone de manifiesto las dos formas en que se puede presentar el proceso de actualización: i) como el valor nominal menos el correspondiente descuento o ii) simplemente como la actualización del valor nominal mediante el empleo del factor de actualización $v = \frac{1}{1+i}$.

En síntesis, los razonamientos alternativos que hemos propuesto - y que por otra parte no son los únicos- para determinar las relaciones entre i y d muestran que las tasas de interés y de descuento son equivalentes, en el sentido que producen la misma masa de descuento, siempre que se apliquen al valor actual y al valor nominal, respectivamente, ya sea como $V \cdot i$ o bien como $N \cdot d$ y que la relación entre i y d para un período de actualización esté dada, por ejemplo, mediante: $d = i / (1+ i)$.

6.3. Formas prácticas de las operaciones de descuento: descuento comercial, descuento a interés compuesto, descuento racional

En los puntos precedentes el análisis abarcó sólo un período de capitalización o de actualización. Esto fue hecho en forma deliberada, para evitar las complicaciones que surgen cuando se incluyen varios períodos, ya que como existen diversas formas de calcular el descuento y los resultados no son de ninguna manera coincidentes se plantea nuevamente el problema del rendimiento de las operaciones financieras. Hemos visto que esto se pone de manifiesto cuando existe más de un período de capitalización, por la aplicación de regímenes que incluyen elementos de interés simple.
Los sistemas de descuento utilizados en la práctica se denominan: comercial o directo, a interés compuesto y racional y a ellos nos referiremos seguidamente.

6.3.1 Descuento comercial o directo

En esta modalidad el descuento se calcula como la tasa de interés aplicada al valor nominal por el tiempo que resta para el vencimiento de la operación.

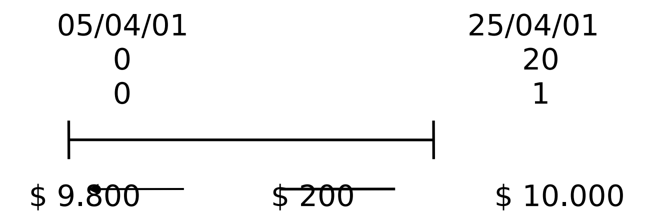
Por ejemplo, supongamos que el 05/04/01 el señor DD necesita alrededor de $ 10.000 por un lapso de 20 días. Para obtener ese dinero emite un cheque por

esa suma con fecha 25/04/01 y concurre a un prestamista que "descuenta" el cheque mediante la modalidad del descuento comercial o directo, aplicando el 3% mensual de interés. El razonamiento del prestamista puede ser el siguiente: "la tasa de interés es el 3% mensual y como debo efectuar el préstamo por 20 días tengo que aplicar :

$\frac{0,03 \ . \ 20}{30} = 0,02$ esto es el 2%. Puesto que el préstamo es de $ 10.000 resulta un descuento de $ 10.000 . 0,02 = $ 200 ".

Así que el acreedor le entregará al deudor: $ 10000 - $ 200 = $ 9800 el 05/04/01 y este le devolverá $ 10.000 el 25/04/01.

En forma gráfica:



El descuento de la operación se puede calcular mediante: $D = N \cdot r \cdot m$ (6.3.1.1)

donde: D : es el descuento de la operación

r : es la tasa de interés aplicada, expresada en tanto por uno. (Por lo general es una tasa diaria).

N : es el valor nominal, la suma que se debe devolver y

m: es la cantidad de períodos (por lo general días) que restan para el vencimiento de la operación o lo que es equivalente la cantidad de períodos que dura el préstamo

Si la tasa que sirve como punto de partida es la tasa mensual de interés, digamos $i_{(30)}$ entonces $r = \frac{i_{(30)}}{30}$.

La fórmula del valor actual (monto del préstamo) entonces resulta:

$V = N - D = N - N \cdot r \cdot m = N (1 - r \cdot m)$ (6.3.1.2) o bien, si el punto de partida es la tasa mensual de interés, con el plazo expresado en días, tenemos:

$$V = N \left(1 - \frac{i_{(30)} \cdot m}{30} \right).$$

Ahora bien, si en nuestro ejemplo calculamos el rendimiento mensual de la operación, o sea, la tasa efectiva mensual, entonces se obtiene:

a) a tasa de interés de 20 días: $\frac{200}{9800} = 0,0204082$

b) tasa efectiva mensual: $(1 + 0,020482)^{30/20} - 1 = 0,0307680$ ó 3,077%

Estos resultados muestran que la tasa efectiva mensual de la operación no es el 3%, tal como se había especificado, sino el 3,077%, de modo que la tasa pactada no refleja los intereses efectivamente abonados y es, desde este punto de vista una tasa “mentirosa”, -la aplicación del descuento comercial o directo produce un ejemplo de una operación que no es transparente.

Prosiguiendo con esta línea de razonamiento se puede argumentar que si la tasa de interés aplicada para el préstamo de 20 días es el 2%, entonces la capitalización del valor actual debe conducir al valor final (o nominal) del préstamo y de esta forma las dos cantidades resultarían equivalentes: $ 9800 al inicio del período y $ 10000 al final, considerando una tasa de interés del 2% para el plazo de 20 días.

Sin embargo; si se capitaliza el valor actual al 2% resulta: $ 9.800 . 1,02 = $ 9.996. Esto significa que estando vigente la tasa del 2% para el plazo de 20 días ambas cantidades no son equivalentes. O sea, no rige esa tasa de interés puesto que habíamos visto que la tasa aplicada es el 2,04082% y no el 2% que se había calculado.

Este interés cobrado aparece como excesivamente abultado y por este motivo al régimen
de descuento comercial o directo se lo denomina también descuento “abusivo”. Se desea destacar que el hecho de que el rendimiento sea superior al pactado no deviene de la mala fe de ninguna de las partes contratantes sino del modelo utilizado.

Si la operación se hubiera pactado a 30 días de plazo tampoco resultaría transparente. En este caso si m está expresado en días es m=30, $i_{(30)} = 0,03$, N = $10.000 y el valor actual V se obtiene mediante:

$$V = N \left(1 - i_{(30)} \cdot \frac{m}{30} \right).$$

$$V = 10.000 \left(1 - 0,03 \cdot \frac{30}{30} \right) = \$ 9700$$

D = $ 300

El rendimiento de la operación , que podemos denotar mediante $s_{(30)}$ es:

$$s_{(30)} = 300 / 9700 = 0,03092784.$$

Este resultado no concuerda con la tasa pactada y hay un claro perjuicio para el deudor. Esta modalidad de descuento no es, por lo tanto, equitativa.

Sin embargo, el resultado más paradójico derivado de la aplicación de esta modalidad de descuento se obtiene analizando la fórmula (6.3.1.2) esto es: $V = N (1 - r . m)$. Si la tasa de interés es relativamente grande y m es un plazo extenso, el producto $r . m$ puede ser mayor que 1 en cuyo caso el valor actual resultaría negativo: esto significa que un deudor debería entregar una cierta suma de dinero hoy, para comprometerse a entregar otra suma al vencimiento del plazo, lo que constituye un resultado francamente absurdo. Nótese que, por ejemplo con una tasa de interés del 80% anual y un plazo de 18 meses el factor de actualización $(1 - r . m)$ es: $(1 - 0{,}80 . 1{,}5) = -0{,}20$. No resulta redundante recordar que tasas próximas al 100% anual fueron muy frecuentes en nuestra economía en un pasado no muy lejano, incluso sin mencionar el período de hiperinflación. Por eso en caso de períodos con tasas de interés elevadas el carácter de abusivo de este sistema de préstamo se ve potenciado.

Por otra parte, puede comprobarse que el régimen de descuento directo resulta de calcular el descuento mediante las reglas del interés simple.

En efecto, si en $I = \frac{C . R . t}{100 . u.t.}$ se hace: $I = D$; $C = N$; $R/100 = r$ y $\frac{t}{ut} = m$, entonces,se sigue que $D = N . r . m$. Una vez más se comprueba que el descuento se calcula aplicando la tasa al valor nominal (o valor final), proporcionalmente al tiempo que dura el préstamo. Esta forma de cálculo adolece de vicios de procedimiento que conducen a desnaturalizar esta operación financiera:

i)en primer término se aplica la tasa de interés a un valor final, cuando debiera aplicarse a un valor actual, en consonancia con lo visto en el punto 6.2 y

ii) ello conduce a que la tasa de interés se aplique a un capital que nunca es recibido por el deudor. Ëste recibe V y, por lo tanto, si hay que cargar el interés por el uso del préstamo, para un período este debería ser $V . r$. Sin embargo, como se calcula el producto $N . r$ la diferencia entre ambos : $N . r - V . r = D . r$ representa el exceso de intereses cobrados provenientes de un capital que nunca fue prestado. Este exceso explica la falta de transparencia de este régimen y, su carácter de abusivo. En el ejemplo que hemos presentado el exceso de intereses generado por este motivo asciende a : $ 200 . 0,02 = $ 4.

Este sistema no debería ser utilizado en el sistema financiero institucionalizado puesto que una vieja norma del Banco Central (data del año 1977) establece “que sólo podrán cobrarse intereses por los capitales efectivamente prestados y por el tiempo que están a disposición de los clientes” y como se ha mostrado, en el descuento directo hay que abonar intereses por un capital que nunca se recibió. No obstante, se utiliza el condicional “debería” para evitarse las sorpresas de la práctica, si es que algunas instituciones financieras todavía lo utilizan.

Uno podría preguntarse también que sucedería con esta operación si la tasa de interés r es sustituida por la tasa de descuento, digamos u, en (6.3.1.1) y (6.3.1.2). Estas fórmulas resultarían:

$D = N \cdot u \cdot m$ (6.3.1.3) donde $u = \frac{r}{1+r}$ y $V = N (1 - u \cdot m)$ (6.3.1.4)

Considerando de nuevo el primer ejemplo presentado en 6.3.1 y partiendo de la tasa del 3% mensual puede haber dos formas distintas de instrumentar la operación:

a) Se convierte la tasa de interés mensual en tasa de interés de 20 días de plazo y luego se transforma ésta en tasa de descuento para este plazo:

$$r = \frac{I_{(30)} \cdot 20}{30} = \frac{0,03 \cdot 20}{30} = 0,02$$

$$u = \frac{r}{1 + r} = \frac{0,02}{1+0,02} = 0,019607843$$

Este procedimiento conduce a:

$$V = \$\ 10.000 (1 - 0,019607843) = \$\ 9803,92$$

En este caso se deduce inmediatamente que la tasa efectiva aplicada para el plazo de 20 días es el 2%; pero esto representa una tasa efectiva mensual del $i = (1 + 0,02)^{30/20} - 1 = 0,0301495$ que es mayor que el 3% establecido. Es evidente que aquí el 3% actúa como una tasa nominal mensual de interés y la tasa efectiva de la operación sería 3,01495% mensual. Como se ve, tampoco este cálculo conduce a una operación estrictamente “transparente”, aunque la diferencia es muy pequeña. El problema deriva del empleo de la proporcionalidad para el cálculo de la tasa que debe ser aplicada para el plazo de 20 días. La proporcionalidad responde a las reglas del interés simple, en tanto que el cálculo de las tasas efectivas utiliza las reglas del interés compuesto y de allí la dicotomía que se presenta, aún cuando en este caso esa dicotomía podría ser salvada indicando las dos tasas: la contractual mensual y la efectiva mensual. Se convendría que este procedimiento puede resultar muy engorroso o complicado.

b) otro razonamiento puede sugerir transformar la tasa de interés del 3% mensual en tasa de descuento mensual y luego proporcionar esta última tasa para el plazo de 20 días. A pesar de que se mostrará que este es un razonamiento incorrecto se desarrollará en toda su extensión.

Denotando mediante $u_{(30)}$ a la correspondiente tasa mensual de descuento sería:

$$u_{(30)} = \underline{\ I_{(30)}\ } = \underline{\ 0,03\ } = 0,02912621$$

$$1 + I_{(30)} \qquad 1 + 0{,}03$$

Si continuamos denotando con u a la tasa de descuento para el plazo de 20 días y efectuamos la proporción:

$$u = \frac{u_{(30)} \, . \, 20}{30} = \frac{0{,}02912621 \, . \, 20}{30} = 0{,}0194174733$$

Luego:

$$V = N \, (1 - u) = 10.000 \, (1 - 0{,}0194174733) = 9.805{,}83$$

Para hallar la tasa efectiva de interés mensual de esta operación observemos que la tasa de descuento efectivamente aplicada para el plazo de 30 días es 0,02912621y que la correspondiente tasa efectiva de interés para ese plazo es:

$$r = \frac{0{,}0194174733}{1+0{,}0194174733} = 0{,}019047617$$

Así que: $i = (1 + 0{,}019047617)^{30/20} - 1 = 0{,}02870705$. Resulta absurdo pensar que si se pacta una operación en el 3% mensual el acreedor fijará la tasa de manera que obtenga el 2,87% efectivo mensual. Este camino, por consiguiente, debe ser descartado.

El problema ha surgido porque la tasa efectiva de descuento mensual, 0,02912621 -equivalente al 3% efectivo mensual de interés-, fue proporcionada para aplicarla al plazo de 20 días. Esta proporcionalidad introdujo las reglas del interés simple con los problemas consabidos con relación al rendimiento. Esto explica la distorsión en el resultado.

Se hace notar además que los procedimientos a) y b) conducen a resultados bien diferentes, lo que resulta poco admisible en una operación financiera. Esto se debe a que
en el interés simple distintos “recorridos” en el tiempo para formalizar el cálculo de las operaciones, conduce a resultados diferentes y los procedimientos a) y b) siguen esos lineamientos. La presencia del interés simple, que es el que emplea el descuento directo para formalizar los resultados provoca todas estas distorsiones.

De todos modos, en la práctica, el descuento comercial no utiliza la tasa de descuento (sería una sofisticación inadmisible en un procedimiento que se emplea por su sencillez y su “razonabilidad”) y como vimos aún cuando utilizara una tasa de descuento las cosas no mejorarían sustancialmente.

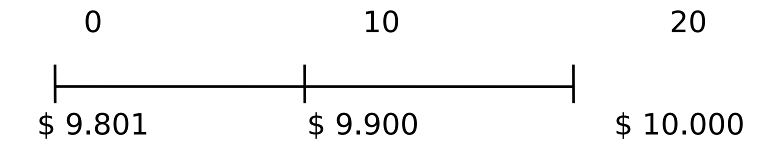
Retomando el problema de los resultados que se obtienen al elegirse distintos “recorridos” podemos plantearnos como ejercicio actualizar la operación que estamos considerando, empleando varias alternativas:

a) en dos períodos de 10 días.

$$V_{10} = \$\ 10.000\ \left(1 - \frac{0,03}{30}\ .\ 10\right) = \$\ 9.900$$

$$V_{20} = \$\ 9.900\ \left(1 - \frac{0,03}{30}\ .\ 10\right) = \$\ 9.801$$

Gráficamente:



El descuento que corresponde a 20 días es $ 199.

b) en cinco períodos de cuatro días cada uno

$$V_{20} = \$\ 10.000\ \left(1 - \frac{0,03}{30}\ .\ 4\right)^5 = \$\ 9.801,59$$

El descuento correspondiente a los 20 días es $ 198,41

c) en un período de 20 días

$$V_{20} = \$\ 10.000\ \left(1 - \frac{0,03}{30}\ .\ 20\right) = \$\ 9.800$$

El descuento es $ 200.

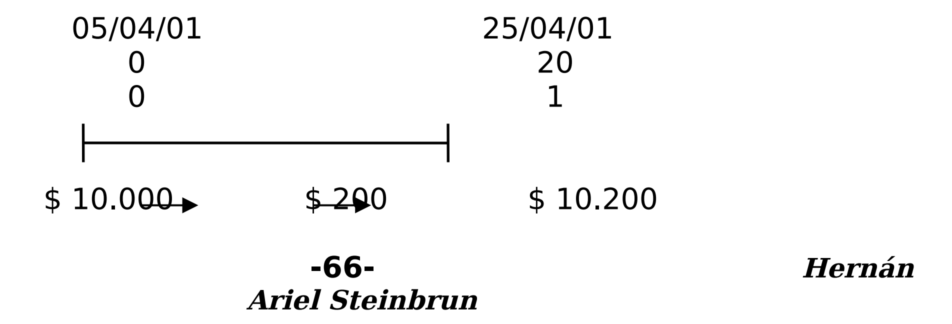
Los resultados difieren según el “recorrido” elegido.

En síntesis, el régimen de descuento comercial se halla inhibido de alcanzar “transparencia” de manera que la tasa pactada coincida con la tasa efectiva aplicada en la
operación. Este sistema se caracteriza por la aplicación indebida de las tasas de interés al valor final, generando intereses abusivos; estas tasas son aplicadas a capitales que no fueron efectivamente prestados y también porque emplea reglas del interés simple que impide que las tasas contractuales coincidan con las tasas efectivamente cobradas.

Los resultados muestran entonces descuentos muy elevados que corresponden a intereses relativamente altos, aún cuando las tasas contractuales sean las vigentes en el mercado. Como se ve, se trata de una operación que puede engañar al deudor no avezado en materia de intereses.
Una pregunta que el lector puede formularse es si es posible corregir el modelo de descuento directo de manera que conserve su sencillez y de manera que el rendimiento de la operación concuerde con la tasa pactada. La respuesta es

que aproximadamente sí y esto se puede lograr si se transforma la operación de manera que los intereses se abonen por período vencido.

Consideremos nuevamente el ejemplo en el cual el 05/04/01 el señor DD necesita alrededor de $10.000 por un lapso de 20 días, emite un cheque por esa suma con fecha 25/04/01 y concurre a un prestamista que "descuenta" el cheque mediante la modalidad del descuento comercial, aplicando el 3% mensual de interés. Habíamos visto que las reglas del interés simple condujeron a que el descuento fuera de $ 200, pero si en lugar de considerarlo así lo consideramos como intereses pagados y son abonados al vencimiento, tal como se muestra en el gráfico siguiente:



En este caso el señor DD recibe $10.000 y abona $10.200. La tasa de interés es el 2% para el plazo de 20 días y la tasa efectiva mensual resulta:

$$s_{30} = (1,02)^{30/20} - 1 = 0,0301495$$

Este resultado coincide con el presentado en a) cuando se convirtió la tasa de interés mensual en tasa de interés de 20 días de plazo y luego se transformó ésta en tasa de descuento para este plazo. Sin embargo, el razonamiento seguido aquí es mucho más sencillo que el anterior y conserva buena parte de las características de la modalidad del descuento directo, aun cuando la operación fue transformada en una de interés abonada por período vencido. La diferencia entre el rendimiento hallado 0,0301495 y el 3% mensual se debe a que la tasa correspondiente al plazo de 20 días se obtuvo mediante proporcionalidad.

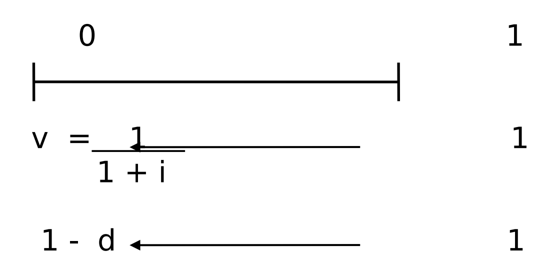
6.3.2 Descuento compuesto.

El régimen de descuento a interés compuesto se caracteriza por la actualización periódica de los sucesivos valores actuales que genera la operación. Así como para obtener el valor final a interés compuesto existe una capitalización periódica de intereses, en este caso, tomando como referencia una "inversión" en la marcha del tiempo se plantea el problema de hallar el valor actual o presente de un valor final o futuro que es actualizado periódicamente aplicando las mismas reglas del interés compuesto.

Para hallar ese valor actual recordemos que en el caso de un período de actualización y de un capital unitario se había determinado que el factor de actualización era:

$$v = \frac{1}{1 + i} = 1 - d$$

Gráficamente:



Esto significa que actualizar un capital por un período es equivalente a multiplicarlo por
1 / (1 + i) ó bien por 1 - d.

Un capital de N unidades monetarias en el período n, valdrá $\frac{N}{1 + i}$ en el período n - 1;

si este capital es actualizado nuevamente en el período n – 2 valdrá:

$$N \,[\, 1 / (\, 1 + i\,)] \,.\, [1/ (1 + i\,)] = N /.(1 + i)^2$$

y si se continúa con este procedimiento se llegará a un valor $\frac{N}{(1 + i)^n}$. en el período cero

Gráficamente:

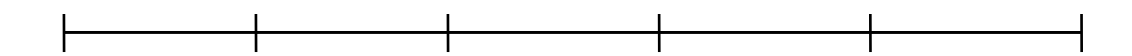
0 1 2 3 . . . . n-2 n-1
n

$N/(1+i)^n$ ← $N/(1+i)^{n-1}$ ← $N/(1+i)^{n-2}$ ← $N/(1+i)^{n-3}$ . . . . . ← $N/(1+i)^2$ ← $N/(1+i)$
N

Este razonamiento contesta por ejemplo, la pregunta: ¿Cuánto vale hoy un capital de $10.000 que se recibirá dentro de 5 meses, si la tasa de interés es el 2% mensual? La actualización se hará empleando las reglas del descuento compuesto .

$$V = \frac{N}{(1 + i)^5} = \frac{\$\ 10.000}{(1{,}02)^5} = \$\ 9.057{,}31$$

0 1 2 3 4
5



$10.000/(1{,}02)^5$ $10.000/(1{,}02)^4$ $10.000/(1{,}02)^3$ $10.000/(1{,}02)^2$ 10.000/1,02 10.000

9.057,31 ← 9.238,45 ← 9.423,22 ← 9.611,69 ← 9.803,92 ← 10.000

Al mismo resultado se llega considerando la tasa $d = \frac{i}{1+i}$ que en este caso es:

$$d = \frac{0{,}02}{1{,}02} = 0{,}0196078$$

Teniendo en cuenta que $v = 1/(1+i) = 1-d$ resulta: $v^n = 1/(1+i)^n = (1-d)^n$. Así que:

$$v^5 = 1/(1+0{,}02)^5 = (1-0{,}0196078)^5 = 0{,}905731$$

donde 0,905731 es el valor presente de una unidad monetaria al cabo de 5 períodos. Luego: V = $ 10.000 * 0,905731 = $ 9057,31.

Se puede presentar un desarrollo de esta operación para visualizar más detenidamente el mecanismo del descuento a interés compuesto. Supongamos que la fecha final es el 05/04/01 y consideremos meses enteros

Fecha	Concepto	Importe	Fórmula
05/04/01	Valor nominal	$10.000	N
05/03/01	Descuento	$10.000 x 0,0196078 =$196,08	$D_1 = N . d$
05/03/01	Valor Actual	$10.000 - $196,08=$9.803,92	$V_1 = N - N.d = N(1-d)$
04/02/01	Descuento	$9.803,92 x 0,0196078 =$192,23	$D_2 = V_1 . d$
04/02/01	Valor Actual	$9.803,92 - $192,23 = $9.611,69	$V_2 = V_1 - V_1 d = V_1(1-d) = N(1-d)^2$
05/01/01	Descuento	$9.611,69 x 0,0196078 =$188,46	$D_3 = V_2 . d$
05/01/01	Valor Actual	$9.611,69 - $188,46 =$9.423,23	$V_3 = V_2 - V_2 d = V_2 (1-d) = N(1-d)^3$

Es sencillo extender la fórmula para n períodos. Si se supone válida para el período n - 1
resultará:

$$V_{n-1} = N(1-d)^{n-1}$$

Para obtener el valor actual correspondiente a la n-ésima actualización se debe restar el respectivo descuento, esto es: $D_{(n-1;n)} = V_{(n-1)} . d$. Luego:

$$V_{(n-1)} = N \; (1 - d)^{n-1}$$

$$- \quad D_{(n-1;n)} = V_{n-1} . d = N \; (1 - d)^{n-1} . d$$

$$V_n = N \; (1 - d)^{n-1} - N \; (1 - d)^{n-1} . d = N \; (1 - d)^n$$

En el ejemplo que estábamos analizando habíamos visto que:

$$V_5 = 10.000 \; (1 - 0{,}0196078)^5 = 9.057{,}31$$

El factor de actualización resulta $v^5 = (1 - d)^5 = \dfrac{1}{(1 + i)^5} =$ 0,905731

Se hace notar que en el cuadro, se prefirió utilizar un solo número natural para indicar el correspondiente período de descuento; por ejemplo, en lugar de identificar el descuento del 1er. período como $D_{(0;1)}$ se colocó D_1, sin embargo, aquella escritura hubiera sido la adecuada puesto que el descuento es un flujo. Por razones de sencillez y para no complicar la nomenclatura se empleó un solo subíndice.

Para visualizar la aplicación de este régimen de actualización, compararlo con el régimen de descuento directo y analizar el tema del rendimiento se desarrollará el primer ejemplo del punto 6.3.1 pero considerando aquí que la operación se efectúa mediante el descuento compuesto.

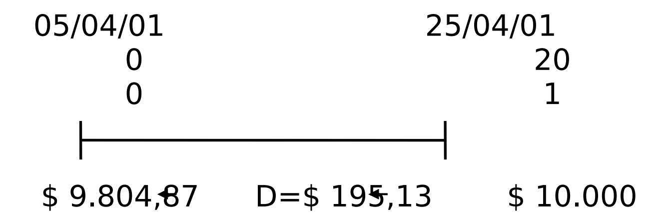
Recordemos que se trataba de actualizar $ 10.000 considerando 20 días de plazo y que la tasa de interés es el 3% mensual.
Si el día es la unidad de tiempo y en concordancia con ello la tasa se expresa como tasa equivalente diaria, ésta resulta:

$$i_{(1)} = (1 + 0{,}03)^{1/30} - 1 = 0{,}00098578$$

en cuyo caso la actualización es:

$$V_{20} = \frac{\$\ 10.000}{(1+0{,}00098578)^{20}} = \$\ 9804{,}87$$

En forma gráfica:



El valor actual se podría haber obtenido también agrupando las dos operaciones anteriores:

$$V_{20} = \frac{\$\ 10.000}{(1+0,03)^{20/30}} = \$\ 9.804,87$$

Se comprueba que el descuento es menor y por consiguiente el valor actual mayor con relación al descuento directo. Bajo este régimen el rendimiento de la operación es el 3% efectivo mensual.

En efecto:

$$i_{(20)} = \frac{195,13}{9.804,87} = 0,01990133$$ es la tasa aplicada en la operación

(tasa efectiva de 20 días de plazo). Por lo tanto la tasa efectiva mensual resulta:

$$i_{(30)} = (1 + 0,01990133)^{30/20} - 1 = 0,03$$

Esta argumentación tiene validez general. Supongamos por simplicidad un valor final unitario, un plazo de m días y denotemos mediante i a la tasa efectiva mensual.
Entonces, el valor actual correspondiente a ese valor final unitario es:

$$v_m = \frac{1}{(1+i)^{m/30}}$$ El descuento resulta:

$$d_m = 1 - \frac{1}{(1+i)^{m/30}}$$ y por consiguiente la tasa de interés para m días es:

$$i_{(m)} = \frac{1 - \dfrac{1}{(1+i)^{m/30}}}{\dfrac{1}{(1+i)^{m/30}}} = (1+i)^{m/30} - 1$$

Si esta tasa se convierte en efectiva mensual se obtiene:

$$i = [\ 1 + i_{(m)}\ ]^{30/m} - 1 = [\ 1 + (\ 1 + i\ )^{m/30} - 1\ ]^{30/m} = i$$

De esta manera se demuestra que el rendimiento coincide con la tasa pactada en la operación, en este sentido es una operación "transparente".

Por otra parte, teniendo en cuenta que $v = \frac{1}{1+i} = 1 - d$ también se podría haber efectuado la operación utilizando la tasa de descuento sin que se alteren los resultados. En efecto, la tasa de descuento mensual es:

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0{,}03}{1 + 0{,}03} = 0{,}02912621$$

Por consiguiente, el valor actual correspondiente a 20 días es::

$$V_{20} = \$\ 10.000\ (\ 1 - 0{,}02912621\ )^{20/30} = \$\ 9804{,}87$$

Y el factor de actualización es :

$$v^{20/30} = \frac{1}{(\ 1 + i\ )^{20/30}} = (\ 1 - d\ )^{20/30} = 0{,}980487$$

Se comprueba que si se respetan las reglas del interés compuesto el resultado es único independientemente de los "caminos" recorridos. Este sistema no tiene los problemas del descuento directo y conduce a operaciones en los que la tasa contractual coincide con la tasa efectivamente aplicada en el cálculo.

6.8 Ejercicios

1. Comentar: El descuento no es sino una masa de intereses que pueden considerarse como percibidos por adelantado.

En efecto, el descuento se distingue del interés básicamente por la forma en que es analizada la operación: si el punto de partida es un valor futuro al cual se deduce una suma de dinero para obtener un valor actual, se trata de una

operación de descuento; si a partir de un valor presente o inicial se desea obtener un valor final, se trata de una operación de interés. La masa del descuento puede ser vista como una masa de intereses, de hecho también se denominan intereses abonados por adelantado.

2. Comentar: Si las operaciones de descuento pueden ser analizadas como operaciones de interés, entonces el descuento resulta redundante.

Si todas las operaciones se efectuaran según las reglas del interés el descuento resultaría redundante, pero como en la práctica subsisten operaciones que se canalizan según las
reglas de las operaciones de descuento, resulta menester conocerlas para evaluarlas.

3. Comentar: El descuento es una variable "stock" porque existe en un punto del tiempo.

No. Es una variable "flujo" porque se genera en el tiempo en virtud de una operación financiera, por ejemplo de préstamo, mediante la aplicación de la tasa de interés (o de descuento) a un capital.

4. Si se considera un período, entonces $d < i$.

En efecto, si al comienzo del período el interés es d y al finalizar el mismo es i resulta:

$i = d\,(1 + i)$ o bien : $d = i / (1 + i)$. Si $i > 0$ entonces $d < i$.

5. En el caso de un solo período si $N = \$\ 10.000$ e $i = 0{,}02$, hallar:

a) d ; b) D ; c) v ; d) V .

a) $d = i / (1 + i) = 0{,}02 / 1{,}02 = 0{,}0196078$.

b) $D = N \,.\, d = 10.000 * 0{,}0196078 = 196{,}08$.

c) $v = 1 / (1 + i) = 1/ 1{,}02 = 0{,}980392$

d) $V = N \,.\, v = 10.000 * 0{,}980392 = 9803{,}92$.

6. En el caso de un solo período si $N = \$\ 10.000$ y $d = 0{,}015$ hallar:

a) i ; b) V ; c) D ; d) I

a) $i = d / (1 - d) = 0{,}015 / (1 - 0{,}015) = 0{,}0152284$.

b) $V = N\,(1 - d) = 10.000 * (1 - 0{,}015) = 9850$.

c) $D = N – V = 10.000 – 9850 = 150$

d) $I = C_1 – C_0 = 10.000 – 9850 = 150$

7. Halle los resultados de 6) mediante otras fórmulas.
c) $D = N . d = 10.000 * 0,015 = 150$ b) $V = N – D = 10.000 – 150 = 9850$

d) $I = C_1 – C_0 = 10.000 – 9850 = 150$

a) $i = (C_1 – C_0) / C_0 = 150 / 9850 = 0,0152284$

8. Compruebe que $d = i v$. Qué significado le atribuye a esta fórmula?

Si d es el interés percibido por adelantado por un capital unitario e i es el percibido por período vencido, es inmediato que el valor actual de i es d, es decir: $d = i / (1 + i)$. Como v es el factor de actualización, $v = 1 / (1 + i)$ entonces $d = i. v$. La fórmula expresa que la tasa de interés adelantada no es más que el valor presente de la tasa de interés.

9. Compruebe que $i = d (1+ i)$. Qué significado le atribuye a esta fórmula?

Tomando en cuenta el razonamiento del ejercicio 8) es inmediato que si se capitaliza d se obtiene i, es decir $d (1 + i) = i$. Por lo tanto i, la tasa de interés por período vencido no es más que el valor final de la tasa de descuento.

10. Si $d = 0,025$ y $V = 1000$. Un solo período. Halle:

a) i ; b) N ; c) D.

a) $i = d / (1 – d) = 0,025 / (1 - 0,025) = 0,025641$

b) $N = V * (1 + i) = 1000 * 1,025641 = 1025,64$
b
c) $D = N – V = 1025,64 – 1000 = 25,64$.

11. Si $V = 1000$ y $N = 1034$. Un solo período. Halle:

a) i ; b) d

a) $i = (C_1 – C_0) / C_0 = 34 / 1000 = 0,034$.

b) $d = i / (1 + i) = 0,034 / 1,034 = 0,032882$

12. El 25 de enero de 2001 el banco XX acreditó mi cuenta en \$ 12.000 producto del descuento de un documento de \$ 12.235 cuyo vencimiento ocurrió el 13 de febrero de 2001. Si la operación se efectuó mediante la modalidad del descuento comercial, se desea saber: i) cuál fue la tasa de interés mensual aplicada en el cálculo; ii) la tasa efectiva mensual de la operación.

La operación se extendió durante 19 días. A partir de : $V = N (1 – i_D . m / 30)$ se obtiene:

$i_D = (30 / m) (1 - V / N)$ $i_D = (30 / 19) (1 – 12.000/ 12235) = 0,030327$ donde

i_D denota a la tasa de interés del sistema directo correspondiente a 30 días de plazo.
La tasa efectiva de interés correspondiente a 19 días de plazo es:

$i_{19} = 235 / 12000 = 0,019583$. Así que: $i_{30} = (1,019583)^{30 / 19} – 1 = 0,031095$.

13. El 05/03/01 necesito \$ 10.000 que me comprometo a devolver mediante un cheque con fecha 18/04/01. Si la modalidad del préstamo es el descuento comercial, la tasa de interés es el 3,5% mensual y me cobran, en concepto de comisión, el 0,8% sobre el monto prestado, es decir sobre los \$ 10.000, los que abonaré conjuntamente con sus intereses el 18/04/01. Se desea saber:

a) ¿ Con qué importe debo llenar el cheque?
b) La tasa efectiva mensual de la operación.

A partir de : $V = N (1 – i_D . m / 30)$ se obtiene: $N = V / (1 – i_D . m / 30)$. Así que :

$N = 10.000 / (1 – 0,035 . 44 / 30) = 10.541,11$. A este importe se le debe agregar el 0,8% sobre \$ 10.000, en carácter de comisión, es decir, \$ 80, más los intereses sobre estos \$80, que representan \$80 * (0,035 * 44 / 30) = \$ 4, 11 el cheque deberé llenarlo con un importe de \$10.625,22.

La tasa efectiva de interés correspondiente a 44 días de plazo es:

$i_{44} = 625,22 / 10000 = 0,062522$. Así que: $i_{30} = (1,062522)^{30 / 44} – 1 = 0,0422159$.

14. El 05/03/01 necesito \$ 10.000 que me comprometo a devolver mediante un cheque con fecha 18/04/01. Si la modalidad del préstamo es el descuento comercial, la tasa de interés es el 3,5% mensual y me cobran, en concepto de comisión, el 0,8% sobre el valor nominal, suma que ya está descontada del importe que me entregan el 05/03/01. Se desea saber: ¿ Con qué importe debo llenar el cheque?

El préstamo obtenido, digamos V_1, se compone de $ 10.000 más el 0,8% de N.

Luego, a partir de $V_1 = N (1 – i_D . m / 30)$ se sigue que:

10.000 + 0,008 * N = N (1 – 0,051333).Así que: N = 10.000 / [(1 – 0,051333) – 0,008] .

Entonces: N = $10.630,75

15. El 17/09/01, un individuo decide descontar un cheque diferido por valor de $7.500, cuyo vencimiento opera el 15/11/01 ¿Cuál de las siguientes alternativas le conviene más?

a) Descontar el documento a una tasa adelantada del 1,45% efectivo mensual. Interés compuesto.
b) Descontar el documento a una tasa vencida del 1,5% efectivo mensual. Interés compuesto.
c) Descontarlo al 1,4% mensual según el descuento comercial.
d) Descontarlo al 1,4% mensual según el descuento racional.

El 1,5% efectivo mensual vencido implica que la tasa de interés adelantada, d, es:

$$d = i / (1 + i) \quad \text{es decir:} \quad d = 0{,}015 / (1 + 0{,}015) = 0{,}014778$$

Por lo tanto, al deudor le conviene más la alternativa a) que la b).

Las comparaciones con las otras alternativas se efectuarán calculando los valores actuales.

En primer término señalemos que: $V = N (1 – d)^{m / 30} = N / (1 + i)^{m / 30}$. Esta relación puede obtenerse reemplazando i por d / (1 – d) en la expresión del segundo miembro..

El valor actual de la alternativa a) es: $V = \$7.500 * (1 – 0{,}0145)^{59 /30} = \$ 7287{,}62$

El valor actual de la alternativa c) es : V = $7.500 (1 – 0,014 *59 / 30) = $ 7293,50

El valor actual de la alternativa d) es: V = $7.500 / (1 + 0,014 * 59 / 30) = $ 7.299,03

Al deudor le conviene más la alternativa d), pero esta alternativa no se utiliza en la práctica.

16. Determinar cuáles son las tasas efectivas mensuales de interés y de descuento para cada una de las alternativas del ejercicio anterior.

Las tasas efectivas mensuales de interés se pueden calcular mediante:

$$i_{(30)} = (N / V)^{30/59} - 1.$$

Las tasas efectivas mensuales de descuento pueden calcularse mediante:

$$d_{(30)} = i_{(30)} / (1 + i_{(30)})$$

Respuesta: las tasas efectivas mensuales para cada alternativa son las siguientes

de interés	***de descuento***
a) 0,0147133	0,0145000
b) 0,0150000	0,0147783
c) 0,0142976	0,0140961
d) 0,0139068	0,0137161

17. El 17/09/01 acreditaron mi cuenta en $ 7. 350 producto del descuento de un cheque diferido de $ 8.000 cuyo vencimiento ocurrió el 24/11/01; cuál es la tasa de interés efectiva mensual de la operación?

Nótese que en este ejercicio no hace falta especificar la modalidad de descuento empleada porque se trata de determinar una tasa efectiva mensual y esto se obtiene únicamente empleando las reglas del interés compuesto.
Así que: $i_{(30)} = (N / V)^{30/68} - 1.$, es decir: $i_{(30)} = (8000 / 7350)^{30/68} - 1 = 0,0380935$.

18. El 17/09/01 acreditaron mi cuenta en $ 7. 350 producto del descuento de un cheque
diferido de $ 8.000 siendo la tasa de interés el 2,5% mensual. Si los cálculos se efectuaron empleando el descuento compuesto ; cuál es la fecha de vencimiento de la operación?

De $V = N / (1 + i)^{m/30}$ sigue que: $m = 30 * [\ln (N / V) / \ln (1 + i)]$. Así que:

$$m = 30 * [\ln (8000 / 7350) / \ln (1,025)] = 102,96$$

Si consideramos 103 días el vencimiento debió ocurrir el 29/12/01.

19. Efectuar el ejercicio anterior pero considerando que el cálculo se efectuó empleando las fórmulas del descuento directo.

De $V = N (1 - i .m / 30)$ sigue que : $m = 30 * (1 - V / N) / i$. Luego:

$$m = 30 * (1 - 7350 / 8000) / 0,025 = 97,5$$

Si consideramos 98 días el vencimiento debió ocurrir el 24/12/01.

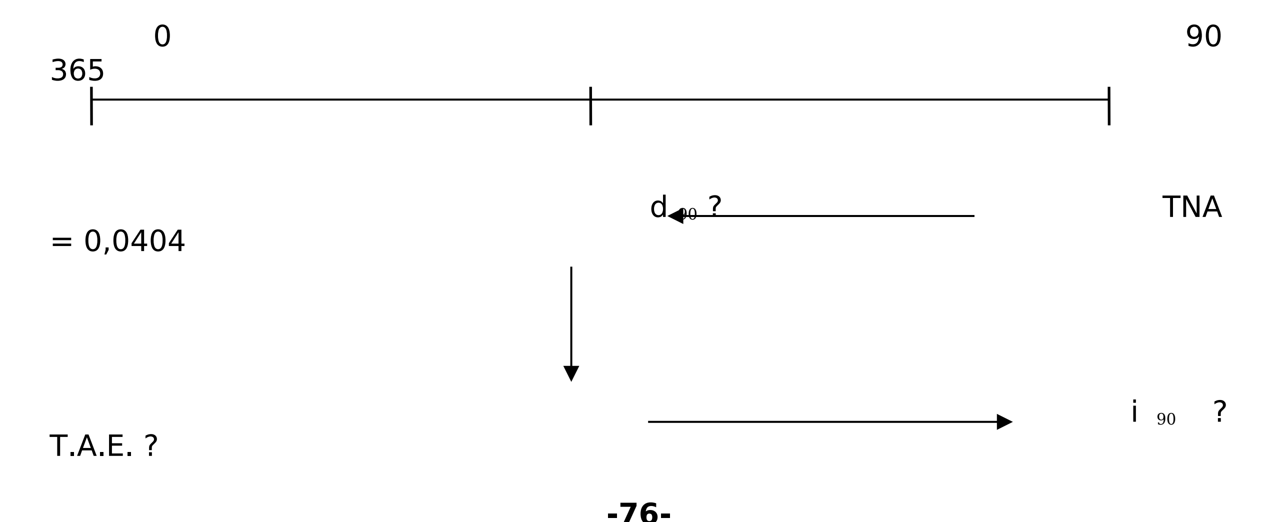
20. Se desea completar la segunda columna de un aviso que se publicará a fin de dar a conocer las tasas efectivas anuales vigentes para operaciones con Letras del Tesoro de los Estados Unidos.

TÍTULOS EN LOS EEUU

	PLAZO	**T N A**	**TEA**
LETRAS	***3 meses***	*4,04%*	***. . . . .***
DE	***6 meses***	*4,45%*	***. . . . .***
TESORERÍA	***1 año***	*4,97%*	***. . . . .***

Recordemos que las tasas de Letras del Tesoro de los Estados Unidos consideran un año de 360 días. Las tasas efectivas anuales, sin embargo, serán calculadas utilizando un año de 365 días. TNA denota tasa nominal anual adelantada y TEA tasa anual efectiva (vencida).

Volcamos los datos referidos al plazo de 3 meses en un eje de tiempo. El esquema muestra que con la tasa anual adelantada calcularemos la tasa adelantada que se aplica para el plazo de 90 días; a partir de esta tasa calcularemos la tasa efectiva para 90 días de plazo y, por último con este dato calcularemos la tasa anual efectiva.



Obtendremos en primer ‘termino la tasa adelantada para el plazo de 90 días.

$$d_{90} = \frac{T.N.A.. \times 90}{} \qquad d_{90} = \frac{0,0404 \times 90}{} = 0,0101$$

360 360

Esto significa que si una letra de 90 días de plazo tiene valor nominal u$s 100.000 al vencimiento, 90 días antes, en la fecha de emisión vale:

$$V = N (1 – d) = 100.000 (1 – 0{,}0101) = 98.990 \text{ dólares.}$$

Luego:

$$i_{90} = \frac{d_{90}}{1 - d_{90}} = 0{,}010203 \quad \text{y} \quad T.A.E. = (1 + 0{,}010203)^{365/90} - 1 = 0{,}04202836$$

Se puede notar que la tasa de interés para el plazo de 90 días también se pudo haber calculado utilizando los datos de la letra de 100.000 dólares valor nominal.

En efecto el descuento es : D = N – V = 100.000 – 98.990 = 1010 dólares. Este puede ser interpretado como el interés, por 90 días de plazo, por la colocación de un capital de 98.990 dólares. Así que la tasa de interés para este plazo resulta:

$$i_{90} = 1010 / 98990 = 0{,}010203.$$

Los demás casos se calculan de análoga manera, aunque la tasa anual efectiva para la letra de un año de plazo puede calcularse inmediatamente como :

$$0{,}0497 / (1 – 0{,}0497) = 0{,}0523$$

Respuesta: las tasas efectivas vencidas para los distintos plazos son las siguientes:

3 meses	4,20%
6 meses	4,67%
1 año	5,23%

21. Por qué, a pesar de que si en los cálculos conducentes a obtener el descuento directo se utiliza la tasa de interés i, el rendimiento para el acreedor es superior al pactado, es decir, la operación no es transparente, carece de sentido utilizar la tasa de descuento d en reemplazo de i ? .

Porque de acuerdo a lo desarrollado en el texto el rendimiento de la operación para el acreedor resultaría inferior a la tasa pactada, motivo por el cual este no efectuaría la operación. La tasa tampoco sería transparente.

CAPÍTULO 8. EL CÁLCULO FINANCIERO Y LA TASA DE INFLACIÓN.

El propósito de este capítulo consiste en analizar cómo y en qué medida los procesos inflacionarios afectan a las operaciones financieras que hemos denominado de pago único y que son las que hemos considerado hasta aquí. Este análisis es muy necesario por la persistencia, la recurrencia y la virulencia de la inflación en nuestra economía.

Desde fines de los 50' y el comienzo de la década de los 60' la economía argentina atravesó una seria situación inflacionaria que en algunos períodos, especialmente durante el año 1989, se convirtió prácticamente en hiperinflación. Las tasas de aumento de los precios eran siderales y también eran habituales las tasas de inflación mensuales del 50% o más.

Esos períodos se caracterizaron desde el punto de vista monetario por una "huida" del dinero; en el sentido que los agentes económicos al comprobar que se deterioraban aceleradamente sus tenencias de dinero local, buscaban refugio en otras monedas, principalmente el dólar y ello condujo a una desmonetización progresiva de la moneda local.

El uso del dólar se generalizó en casi todo el sector real de la economía; se utilizó principalmente en las transacciones importantes, pero también se empleó en las pequeñas transacciones; se convirtió en la unidad de cuenta que regulaba nuestros intercambios y en la reserva de valor.

Sin embargo, en el mercado financiero la situación era formalmente distinta. El uso del dólar estaba más restringido – en los 80' prácticamente no había ni depósitos ni préstamos en dólares - y se desarrollaron otros mecanismos de ajuste para preservar el valor de la moneda. El recurso utilizado casi exclusivamente fue la indexación: de los depósitos y de los créditos. Ellos eran relacionados con algún índice de ajuste de modo que tanto el capital como los intereses fueran percibidos en términos reales, es decir netos de los efectos de la inflación. Esta práctica también se difundió ampliamente y nuestra economía estuvo por una parte dolarizada y por la otra indexada, casi sin que hubiera resquicio para el empleo de nuestra moneda local en términos nominales, salvo en las transacciones minúsculas

Los índices aplicados para indexar fueron numerosos y por lo general eran elaborados por organismos oficiales. Entre ellos se pueden citar el Índice de Precios al Consumidor, el Índice de Precios al por Mayor, tanto el Nivel General como otros rubros incluidos en el índice, el Índice del Costo de la Construcción, el Índice de la Comunicación "A" 1050, que luego se convirtió en el Índice de Ajuste Financiero, Índices de tipo de cambio, Índices de salario, etc. Baste señalar que por los 80' el Banco Central publicaba mensualmente alrededor de treinta índices que se elaboraban con periodicidad diaria y que servían para indexar depósitos, créditos y en general las transacciones en las que hubiera algún diferimiento en la entrega del dinero.

La dolarización por una parte y la indexación por la otra, prácticamente eran totales y a
medida que se agravaba la situación económica se requería algún tipo de solución porque la crisis era insostenible . Este sistema no tenía forma de revertirse a sí mismo; aún más;

generaba un mecanismo perverso de retroalimentación y la economía giraba en torno de un círculo vicioso: la inflación requería y justificaba la indexación y ésta consolidaba y exacerbaba a aquélla.

La situación cambió en abril de 1991 con la sanción de la Ley 23928 de Convertibilidad del Austral. En lo que a nuestro tema concierne esta Ley estableció en el artículo primero. la paridad del dólar con el austral, que en ese entonces era nuestra moneda, fijándola en 10.000 australes por dólar; en los artículos séptimo, octavo y décimo prohibió a partir del 1 de abril de 1991 toda forma de indexación y estableció en el artículo noveno los mecanismos a que se deberían ajustar todas las relaciones jurídicas nacidas con anterioridad a esta Ley pero que mantuvieran prestaciones pendientes. También en el artículo octavo fijó como fecha tope el 1 de abril de 1991 para la utilización de mecanismos de ajuste o de repotenciación del crédito.

Esta Ley estuvo vigente durante casi once años, hasta enero de 2002 donde fue sustituida por la Ley de Emergencia Económica (Ley 25.561). Durante los años en los que se mantuvo vigente la ley de Convertibilidad la inflación dejó de ser un problema y los precios, salvo unas pocas excepciones, no se movieron demasiado.

Si bien la Ley de Emergencia Económica mantiene intactas las prohibiciones de indexar de la ley 23928, la situación ha cambiado mucho en estos casi once años y las presiones inflacionarias que se mantuvieron latentes en nuestra economía presumiblemente se tornen explícitas, de manera que se vuelve necesario el análisis financiero en un contexto de suba de precios.

Antes de concluir esta introducción queremos mostrar algunas cifras relativas al proceso de desmonetización de la economía que ocurrió en la segunda mitad del año 2001 y la “huída” al dólar que se produjo en los momentos críticos.

Se presentan cifras, expresadas en millones, de la circulación monetaria y de los depósitos, estos tanto en moneda nacional como en dólares estadounidenses.

Fecha	**Circulación Monetaria**	**Depósitos en pesos**	**Depósitos en dólares**	**Total de depósitos**
1/7/01	11.169	29.115	50.916	80.032
1/11/01	8.718	23.267	48.691	71.958
7/01/02	....	20.579	42.479	63.058

Las cifras son elocuentes: entre julio y noviembre la circulación monetaria cayó el 21,9% y los depósitos totales en 10,0%, si se compara enero de 2002 la

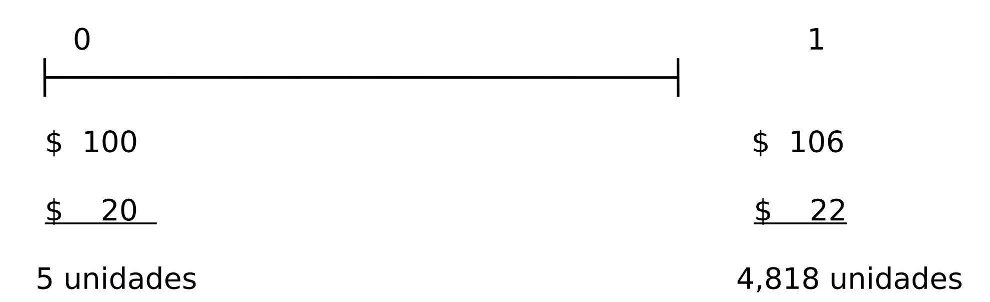
disminución fue mayor. Los depósitos en pesos se redujeron 20,1% entre julio y noviembre de 2001 y 29,3% entre julio de 2001 y enero de 2002.

8.1. La tasa real de interés.

Se denomina tasa real de interés a la tasa de interés libre de los efectos de la inflación. Para interpretar su significado propondremos un sencillo ejemplo.

Supongamos que poseemos $ 100, que en la economía hay un único bien cuyo precio es $ 20 por unidad, que la tasa de interés es del 6% anual y que al cabo de un año el precio de ese único bien se eleva a $ 22.
En el momento actual podemos comprar $100 / $ 20 = 5 unidades del bien; en cambio, si depositamos el dinero al cabo de un año recibo $ 106 y como el precio del bien es ahora $ 22 podemos comprar $ 106 / 22 ó 4,818 unidades de ese bien.

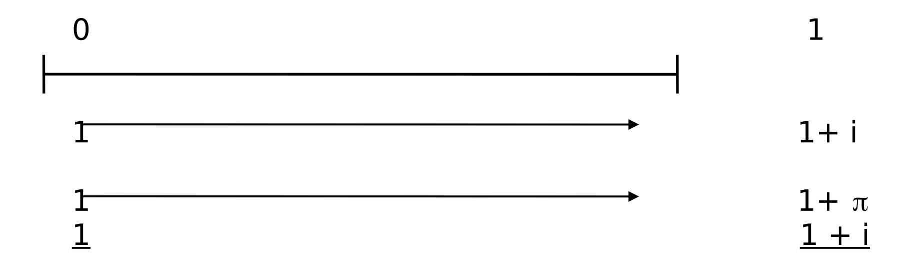
Gráficamente;



Si bien la tasa de interés es del 6% anual, en ese período, en términos de capacidad de compra hemos "perdido" 5 - 4,818 = 0,182 unidades.

En términos relativos esa pérdida es de $\frac{0,182}{5} = 0,0364$ ó 3,64%.

Con el objeto de obtener una fórmula general para la tasa real de interés, podemos considerar un capital inicial de $ 1, que el precio del bien también sea de $ 1; podemos denotar con i a la tasa anual de interés y con π a la tasa anual de inflación. Entonces aplicando el mismo razonamiento que antes resulta:



1 ⟶ $1+\pi$

En términos de unidades adquiridas, la tasa real de interés (o si se prefiere el rendimiento real) se define como:

$$r = \frac{1+i}{1+\pi} - 1 \qquad (8.1.1)$$

Si se aplica al ejemplo anterior, se tiene que:

$$\pi = \frac{22-20}{20} = 0{,}10:$$

$$r = \frac{1+0{,}06}{1+0{,}10} - 1 = -0{,}0364 \text{ ó } -3{,}64\%$$

La fórmula (8.1.1) puede ser transformada para adaptarla al caso en que hubiera más de un período de capitalización. Por ejemplo, si se tratara de tres períodos mensuales y las respectivas tasas de interés fueran: 1%; 0,8% y 0,9%, en tanto que las correspondientes tasas de inflación hubieran sido: 0,9%; 1,1% y 1,0% la presentación gráfica resultaría:

0	1	2	3
1 ⟶	1,01 ⟶	1,01 x 1,008 ⟶	1,01 x 1,008 x 1,009 = 1,02724
1 ⟶	1,009 ⟶	1,009 x 1,011 ⟶	1,009 x 1,011 x 1,01 = 1,03030

Por lo tanto, al cabo de los tres meses la tasa real será:

$$r = \frac{1{,}01 \times 1{,}008 \times 1{,}009}{1{,}009 \times 1{,}011 \times 1{,}01} - 1 = \frac{1{,}02724}{1{,}03030} - 1 = -0{,}002197 \text{ ó } -0{,}297\%$$

Si se tratara de k períodos, sintéticamente se puede escribir:

$$r = \frac{(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_k)}{(1+\pi_1)(1+\pi_2)\ldots(1+\pi_k)} - 1$$

en las que las i_j y las π_j denotan a las tasas subperiódicas de interés y de inflación respectivamente.

También la fórmula (8.1.1) puede ser modificada para analizar las relaciones entre la tasa de interés y la tasa de inflación.

De:

$$r = \frac{1 + i}{1+ \pi} - 1$$ efectuando la suma indicada se pasa a:

$$r = \frac{1 - \pi}{1+ \pi} \quad (8.1.2)$$

Se comprueba que si $i > \pi$ la tasa real de interés, r, es positiva; si $i = \pi$ entonces $r = 0$, es neutra, y si $i < \pi$ entonces $r < 0$, esto es, la tasa real de interés es negativa.

8.2. Indexación. Actualización de deudas. Índices de ajuste.

Habíamos dicho que desde fines de la década del 50 y comienzos de la década del 60, la economía argentina pasó por una situación inflacionaria y en algunos períodos, especialmente en el año 1989, se convirtió prácticamente en hiperinflación. Las tasas de aumento de los precios eran siderales y también eran habituales registros mensuales del 50% o más.
En el mercado financiero el uso del dólar estaba restringido y se desarrollaron otros

mecanismos de ajuste para preservar el valor de la moneda. El recurso utilizado casi exclusivamente fue la indexación: de los depósitos y de los créditos. Ellos eran relacionados con algún índice de ajuste de modo que tanto el capital como los intereses fueran percibidos en términos reales, es decir netos de los efectos de la inflación.

Los índices aplicados para indexar fueron numerosos y por lo general eran elaborados por organismos oficiales. Entre ellos se pueden citar el Índice de Precios al Consumidor, el Índice de Precios al por Mayor, tanto el Nivel General como otros rubros incluidos en el índice, el Índice del Costo de la Construcción, el Índice de la Comunicación “A” 1050, que luego se convirtió en el Índice de Ajuste Financiero, Índices de tipo de cambio, Índices de salario, etc.
Ahora ilustraremos con respecto a la elaboración de algunos índices diarios de ajuste. El procedimiento para construir un índice de ajuste diario, se basó, en general en las siguientes reglas:

a) el empleo de la tasa equivalente diaria de la respectiva mensual;

b) esta tasa equivalente diaria, era transformada en un factor de ajuste y este se va acumulando a partir de una base dada elegida arbitrariamente (se verá que esto no influye en las variaciones del índice de ajuste) y

c) puesto que los índices de ajuste diario deberían estar disponibles el primer día hábil del mes en el que se van a aplicar y en esa fecha todavía no se conoce la variación mensual del respectivo índice, por lo general para calcular la tasa equivalente diaria se utilizaba como punto de partida, la variación del índice correspondiente al segundo mes anterior al período de aplicación.

Presentaremos dos ejemplos hipotéticos: uno referido a precios y otro a tasas de interés.

1) Elaboración de un índice de ajuste diario a partir de variaciones de precios. Los valores mensuales del índice XX son:

Período	Índice
1988	
Enero	1820,3
Febrero	1985,5
Marzo	2143,0
Abril	2518,3
Mayo	2941,7

El índice será construido con base 31/03/88 = 100 y se utilizará la variación del 2do mes anterior al de la aplicación para determinar la tasa equivalente diaria. Así, para el mes de abril se utilizara la variación mensual de febrero, o sea; 1985,5/1820,3 - 1 = 0,090754 ó 9,0754%.
La respectiva tasa equivalente diaria es: $i_d = (1 + 0{,}090754)^{1/30} - 1 = 0{,}002900$ (se hace notar que abril tiene 30 días y por eso se utilizó la raíz 30, para mayo se tomará la raíz 31). Se define el índice correspondiente al día t mediante $I_t = I_{t-1}\ (1 + i_d)$, donde i_d es la correspondiente tasa equivalente diaria, 0,002900.

Luego:

Fecha	Índice Base 31/03/88 = 100
31/03/88	100
01/04/88	100 (1,002900) = 100,2900
02/04/88	100,2900 x (1,002900) = 100,5808
03/04/88	100,5808 x (1,002900) = 100,8725
. . . . .	. . . .
30/04/88	$100\ (1{,}002900)^{30}$ = 109,0759

El índice de ajuste para mayo resultará:

$$\frac{2143{,}0}{1985{,}5} - 1 = 0{,}079325 \text{ ó } 7{,}9325\%$$

y la tasa equivalente diaria que se aplicará en el mes de mayo es:

$$i_d = (1{,}079325)^{1/31} - 1 = 0{,}002465$$

De modo que:

Fecha	Índice Base 31/03/88 = 100
01/05/88	109,0759 . 1,002465 = 109,3448
02/05/88	109,3448 . 1,002465 = 109,6143
. . . . .	. . . .

Por ejemplo, un depósito de 10.000 australes por 30 días, efectuado el 05/04/88, con el 5% de interés mensual se hubiera liquidado el 05/05/88 de la siguiente manera:

$$\text{Australes } 10.000 \times \frac{\text{Índice } 05/05/88}{\text{Índice } 05/04/88} \; 1{,}05 =$$

$$= \text{Australes } 10.000 \; \frac{110{,}4269}{101{,}4584} \; . \; 1{,}05 = \text{Australes } 11.428{,}15$$

2) Elaboración de un índice diario de ajuste a partir de tasas de interés.
El índice será construido con base 31/03/88 = 100 y se utilizará la tasa diaria equivalente de la respectiva mensual correspondiente al segundo día anterior al día de aplicación.

Fecha	Tasa efectiva mensual -%-
28/03/88	9,25
29/03/88	9,25
30/03/88	9,30
31/03/88	9,15
01/04/88	9,12
02/04/88	9,35

La fórmula para el índice es análoga a la ya vista, esto es:

$$I_t = I_{t-1} \; (1 + i_d)$$

Luego:

Fecha	Índice Base 31/03/88 = 100
31/03/88	100
01/04/88	100 (1,002968) = 100,2968
02/04/88	100,2968 x (1,002923) = 100,5900
03/04/88	100,5900 x (1,002914) = 100,8831
. . . . .	. . . .

La tasa equivalente diaria del 01/04/88 se calculó tomando la de dos días atrás, esto es a partir de 9,30% mensual; la del 02/04/88 se calculó a partir de 9,15% mensualy así siguiendo.

Se hace notar que estos procedimientos incurren en errores de redondeo de acuerdo a la cantidad de decimales utilizados, de manera que hacia fines de

cada mes pueden no coincidir los valores de los índices de ajuste calculados mediante las tasas equivalentes diarias o bien directamente a partir de las variaciones mensuales. Con el correr del tiempo estas diferencias pueden ser importantes y esto dio lugar, en algunos casos, a presentaciones judiciales de los perjudicados.

Por otra parte la mecánica de cálculo de los índices de ajuste exacerba la inercia inflacionaria, puesto que si la tendencia de la inflación es declinante, la aplicación de índices correspondientes a meses anteriores, lejos de reflejar este hecho impulsa hacia arriba los mecanismos de ajuste.

Se puntualiza que tampoco existe una “medida” de la tasa de inflación, la mayoría de los índices son sólo aproximaciones a la tasa verdadera y la “manía indexatoria” que padeció nuestra economía con una multitud descabellada de índices es, meramente, un reflejo de este hecho.

En este sentido, los precios “sombra” o precios implícitos del producto bruto interno pueden resultar adecuados para medir la “verdadera” tasa de inflación de la economía. Estos precios implícitos se obtienen de dividir el producto bruto interno a precios corrientes por el producto bruto interno a precios constantes, pero tiene el inconveniente que el producto bruto interno se elabora con periodicidad trimestral y con mucho atraso. Una forma de obviar estos inconvenientes es efectuar alguna combinación de precios al por mayor y al por menor, la que puede resultar una estimación adecuada de los precios “sombra” de la economia. De hecho, los precios “combinados” , utilizados para indexar, y que incorporaban la mitad de la variación de los mayoristas y la mitad de la variación de los precios al consumidor, representaron una forma de lograr alguna aproximación a los precios implícitos.

Con respecto a los precios constantes, señalemos que en épocas de inflación carece de sentido relacionar los valores nominales de los precios o de los valores referidos a dos períodos distintos porque la unidad de medida, en términos reales, no es la misma en cada uno de esos períodos. Por eso o bien se divide a ambos valores nominales por

algún índice para obtener valores reales o como se denomina también, precios constantes, o como en el caso del producto bruto interno las cantidades de bienes y servicios producidos se valúan empleando los precios de un año considerado como base. De esta manera al comparar dos períodos del producto se trata de eliminar las fluctuaciones debidas al movimiento de los precios para que las mediciones solo reflejen las variaciones en las cantidades.

Ahora bien, retornando al tema de este capítulo se quiere reiterar que el problema real lo constituye la tasa de inflación y no las mediciones que se hagan de ella: si aquella es alta la moneda que es la unidad de medida de los precios, no puede cumplir este cometido ni tampoco se puede hacer planificación económica; se acude entonces a los índices de ajuste para complementar esa función de la moneda y para tratar de restablecer alguna forma de equilibrio económico.

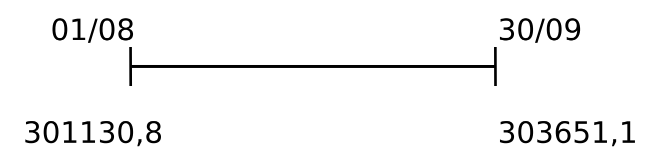
Cuando los precios se alteran bruscamente el equilibrio económico existente se quiebra porque también se alteran los precios relativos de los bienes y los servicios y existen pujas sectoriales debido a que los agentes económicos no quieren ceder posiciones. Esto hace que, en el corto o en el largo plazo, al menos en nuestra experiencia, la situación sea cada vez más difícil de controlar e ingrese en una fase crítica.

8. 3. Ejercicios.

1. Determinar la tasa real de interés bimestral de la siguiente operación:

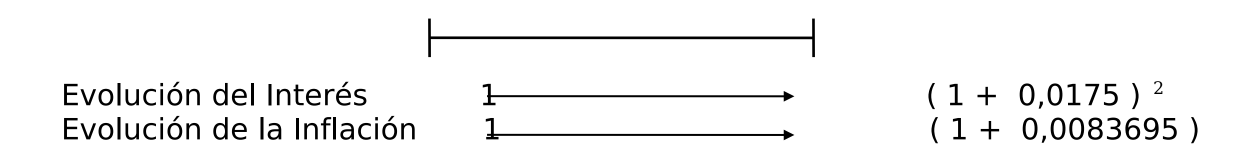
Se depositaron $ 5.500 el 01/08 por dos meses a una tasa efectiva del 1.75% mensual. Los índices de precios son los siguientes:

Mes	Índice
junio	300165.2
julio	301130.8
agosto	301179.1
septiembre	303651.1
octubre	305377.6



Para establecer la variación de los índices en el período comprendido entre el 01/08 y el 30/09 efectuamos el cociente entre el índice de setiembre y el de julio:

$$\frac{\text{Índice de Setiembre}}{\text{Índice de Julio}} = \frac{303651,1}{301130,8} - 1 = 1,0083695 - 1 = 0,0083695$$



$$r = \frac{(1 + 0{,}0175)^2}{(1 + 0{,}0083695)} - 1 = 0{,}0267132$$

La tasa real de interés del bimestre agosto - septiembre es 2,67132%.

2. El índice de precios evolucionó de la siguiente manera: Noviembre 123,8; Diciembre 122,6; Enero 123,1; Febrero 120,6; Marzo 124,2. Si la tasa de interés nominal anual para el plazo de 30 días fue 7% en enero y 6,5% en febrero: i) ¿cuál es la tasa real de interés correspondiente al período enero – febrero ? , ii) ¿ cuál es la tasa real de interés promedio mensual?

Tasa de interés de enero: 0,07 * 30 /365 = 0,0057534.

Tasa de interés de febrero: 0,065 * 30 /365 = 0,0053425.

Tasa de inflación de enero – febrero: (120,6 / 122,6) – 1 = - 0,016313.

Luego la tasa real de enero –febrero es: $r = \frac{1{,}0057534 * 1{,}0053425}{1 - 0{,}016313} - 1 = 0{,}027895$

La tasa real promedio mensual es: $\bar{r} = (1{,}027895)^{0{,}5} - 1 = 0{,}013852.$

Aproximadamente el 1,39% mensual.

3. Si la tasa real de interés en enero fue 0,4 % y el índice de precios disminuyó 0,2 % cuál fue el nivel de la tasa de interés durante ese mes.

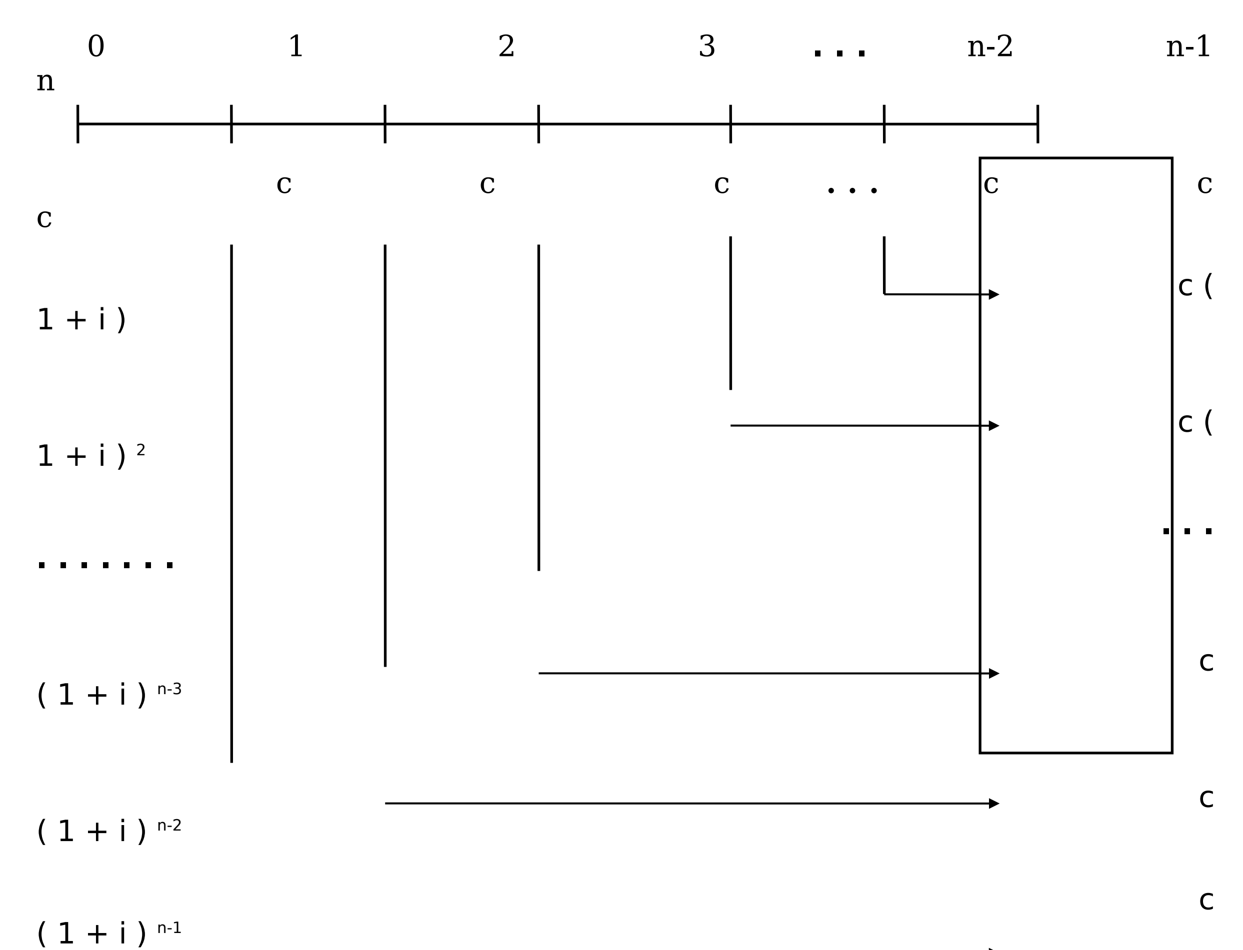
0,004 = (i + 0,002) / 0,998 ; i = 0,998 * 0,004 – 0,002 = 0,01984.

Es decir, el 2,41% nominal anual para el plazo de 30 días.

9.1. *Valores finales.*

El valor final se refiere al valor o suma de dinero que se obtiene al vencimiento de una operación caracterizada por el pago de un cierto número de cuotas. Este valor final incluye los intereses generados por el abono de las cuotas, siempre que la tasa de interés sea positiva, que es lo que ocurre generalmente en la práctica.

El esquema genérico tradicional conducente a determinar el valor final de una renta que se abona por período vencido, cuyas cuotas,denotadas mediante c, son iguales y se abonan equiespaciadamente, es decir, en intervalos equidistantes es el siguiente:



La gráfica refleja el abono de n pagos equidistantes cronológicamente de $ c cada uno denominado cuota y se desea calcular el valor final, denotado mediante VF (1; n; i) de esos n pagos. Con VF (1; n; i) se denota el hecho que los pagos comienzan a abonarse a partir del primer período, que se trata de n pagos de valor c cada uno y que son valuados según las reglas del interés compuesto mediante la aplicación de la tasa i.

Se hace notar que el inicio de las cuotas coincide con el primer período por lo tanto el segmento que va desde el momento cero hasta el momento 1 no tiene ninguna significación. Se lo ha mantenido por una cuestión de costumbre.

El valor final de las cuotas está representado por la suma de los n términos c, $c\,(1+i)$, $c\,(1+i)^{2}$, ... , $c\,(1+i)^{n-1}$. Estos términos tienen como característica que el cociente entre dos consecutivos es constante e igual a (1 + i). Una sucesión de términos de esa

naturaleza, cuya razón o cociente es constante se denomina progresión geométrica.

Por ejemplo, 2, 6, 18, 54, 162, constituye una progresión aritmética de razón 3. También 5,10, 20, 40 es una progresión geométrica de razón 2.

Entonces, para calcular el valor final de las cuotas se requiere sumar los términos de una progresión geométrica. La fórmula correspondiente es la que se expone a continuación:

$$S = a\frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (9.1.1)$$

o bien si se multiplica al numerador y al denominador de esa expresión por –1 resulta:

$$S = a\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

donde:

S: es la suma de los términos;
a: es el primer término de la progresión;
q: razón de la progresión; el cociente entre un término de la progresión y el precedente y
n: número de términos.

Un simple cálculo permite comprobar que mediante la aplicación de cualquiera de estas fórmulas la suma de los términos de la sucesión {2, 6, 18, 54, 162}, es 242 y la suma de los términos de la sucesión {5,10, 20, 40} es 75.

Volviendo a nuestro problema original, el cálculo del valor final VF (1; n; i), cuyos términos están enmarcados en la parte recuadrada del diagrama podemos comprobar que representan una progresión geométrica de razón (1 + i). En efecto, si se extrae el factor común c, en la expresión:

$$VF(1; n; i) = c + c(1 + i) + c(1 + i)^2 + \ldots + c(1 + i)^{n-1} \qquad (9.1.2.a)$$

resulta:

$$VF(1; n; i) = c\,[\,1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^{n-1}\,] \qquad (9.1.2.b)$$

La expresión entre corchetes que denotaremos mediante s (1; n; i) es la suma de los términos de una progresión geométrica en la que el primer término es 1 y la razón (1 + i), así que si se calcula esta suma mediante (9.1.1) se obtiene:

$$s(1,n,i) = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

o bien, si se cancelan los unos en el denominador:

$$s(1,n,i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (9.1.3)$$

Por lo tanto:

$$VF\ (1;\ n;\ i) \quad = \quad c\ .\ s\ (1;\ n;\ i) \quad = \quad c\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (9.1.4)$$

El valor final es simplemente la suma de los valores finales de los valores c, que denominamos cuotas, es decir es el valor de las cuotas en el momento n. Obviamente estas cuotas están capitalizadas, es decir acrecentadas por los intereses mediante la aplicación de la tasa de interés a las cuotas debido al trascurso del tiempo.

La fórmula (9.1.4) también pone de manifiesto el significado de s (1; n; i). Si en esa fórmula se hace c = 1, resulta que VF (1; n; i) representa el valor final de n pagos unitarios equidistantes cronológicamente, el primero de los cuales se efectúa en el primer período y que son valuados según las reglas del interés compuesto, aplicando la tasa i. Como todas las valuaciones se efectuarán empleando las reglas del interés compuesto esta aclaración se omitirá en lo que sigue.

La expresión s (1; n; i) representa un factor de capitalización, de modo que:

VF (1; n; i) = c s (1; n; i)

expresa que las cuotas de valor c son capitalizadas mediante el factor mencionado. Esto implica que para obtener el valor final cada una de las cuotas c es “trasladada” en el eje del tiempo n períodos hacia la derecha. Este “traslado” se obtiene capitalizando a cada una de las cuotas y la expresión que refleja ese traslado es s (1,n,i). Por otra parte la fórmula del valor final VF (1,n,i) se puede interpretar como que cada uno de los pesos que componen la cuota c, sigue la misma suerte que el peso original cuyo valor final está expresado mediante s (1; n; i).

El hecho de que s (1, n, i) sea un factor de capitalización se pone de manifiesto en las fórmulas (9.1.2) donde se pueden observar como se aplican los factores de capitalización de la forma $(1 + i)^j$ a cada uno de las cuotas y cada uno de estos factores “traslada” a la cuota respectiva j períodos hacia la derecha en el eje del tiempo.

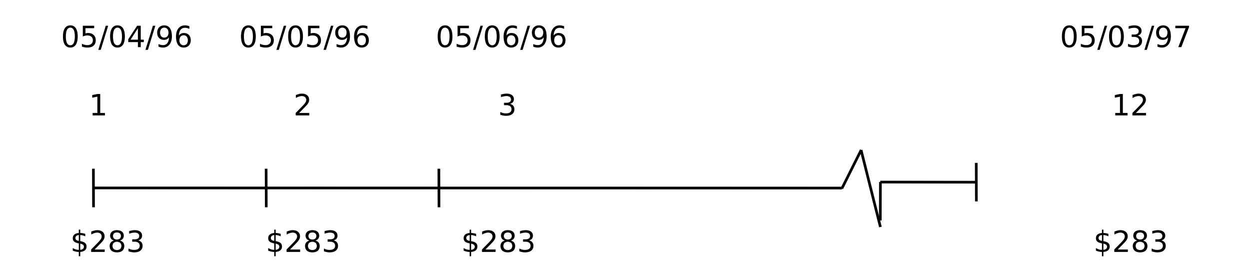
Teniendo en cuenta que s (1, n , i) representa un valor final en caso de que las cuotas sean unitarias, es decir c = 1, permite efectuar una representación gráfica semejante a la que hemos presentado para el caso del valor final. Aquí las cuotas valdrán una unidad monetaria y el valor final, por consiguiente, será: s (1, n , i).

<u>Ejemplo 9.1.1</u>:

El 05/04/95 suscribo un plan de ahorro previo que consiste en abonar 12 cuotas iguales, mensuales y consecutivas de $ 283 cada una, la primera de las cuales es abonada en esa misma fecha. Se desea conocer el valor final (al 05/03/96) si se reconoce una tasa de interés del 0,2% mensual por los depósitos efectuados.

Nota: Los períodos son equidistantes, pero en el eje de tiempo se colocó como fecha el 5 de cada mes para simplificar el análisis.

El esquema puede ser el siguiente:



* VF

(1; n; i)

Si se aplica (9.1.4) se obtiene:

VF (1; 12; 0,002) = $283 s (1; 12; 0,002)

y como:

$(1,002)^{12} - 1$

$$s\,(1;\,12;\,0{,}002) = \frac{}{0{,}002} = 12{,}1328840,$$

resulta:

$$VF\,(1;\,12;\,0{,}002) = \$283 \times 12{,}1328840 = \$\ 3.433{,}61.$$

Esta suma incluye el valor de las cuotas más los respectivos intereses valuados al 0,2% mensual.

9.2. *Cuotas correspondientes a los valores finales.*

Se trata de calcular la cuota c, que abonada periódicamente, por término vencido, en períodos equiespaciados, capitalizada mediante la aplicación de la tasa i constituye un valor final, digamos VF (1; n; i).

El resultado es inmediato y sigue de (9.1.4) que:

$$VF\,(1;\,n;\,i) = c \cdot s\,(1;\,n;\,i),\ \text{donde}\ s\,(1;\,n;\,i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

y de aquí se obtiene:

$$c = VF\,(1;\,n;\,i) \cdot s^{-1}\,(1;\,n;\,i) \qquad (9.2.1)$$

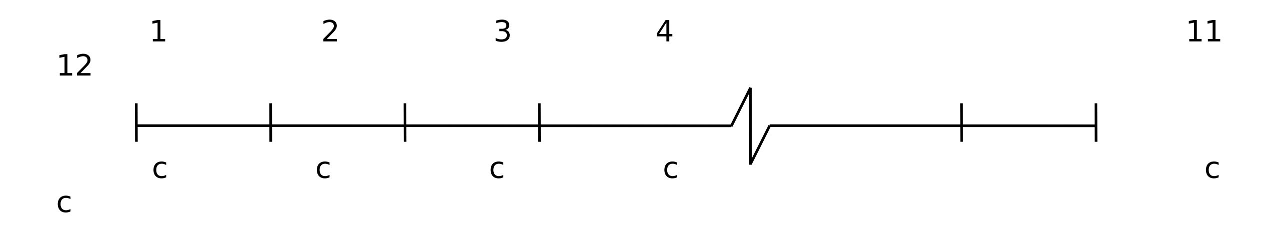
donde: $$s^{-1}\,(1;\,n;\,i) = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad (9.2.2)$$

Si en (9.4.1) se hace VF (1; n; i) = 1 se puede apreciar que s^{-1} (1; n; i) representa la cuota que se debe abonar según las condiciones enunciadas en el primer párrafo de este punto, para constituir un valor final unitario.

<u>Ejemplo 9.2.1</u>:

En un sistema de ahorro previo se requiere integrar $ 10.000 al 05/03/97, mediante el abono de 12 cuotas mensuales, iguales y consecutivas, la primera de las cuales se abonará el 05/04/96. Se desea saber el monto de la cuota si se reconoce una tasa efectiva del 4% anual.

05/04/96 05/05/96 05/06/96 05/07/96 05/02/97 05/03/97



*

$1
0.000

La tasa efectiva mensual considerando: un año de 365 días resulta:

$$i_{(30)} = (1 + 0,04)^{30/365} - 1 = 0,003229 \text{ ó } 0,3229\%$$
mensual.

Entonces la aplicación de (9.4.1) conduce a:

$$c = \$\ 10.000\ .\ s^{-1}(1;\ 12;\ 0,003229)$$

donde:

$$s^{-1}(1;\ 12;\ 0,003229) = \frac{0,003229}{(1,003229)^{12} - 1} = 0,0818637$$

Luego:

$$c = \$\ 10.000 \times 0,0818637 = \$\ 818,64$$

Si se desea, se puede verificar que el valor final de 12 cuotas mensuales, iguales y consecutivas de $ 818,64 valuadas al 0,3229% mensual es $ 10.000.

En efecto:

$$VF(1;\ 12;\ 0,003229) = \$\ 818,64\ .\ s(1;\ 12;\ 0,003229)$$

donde:

$$s(1;\ 12;\ 0,003229) = \frac{(1,003229)^{12} - 1}{0,003229} = \frac{1}{0,08186371} = 12,2154248$$

Luego:

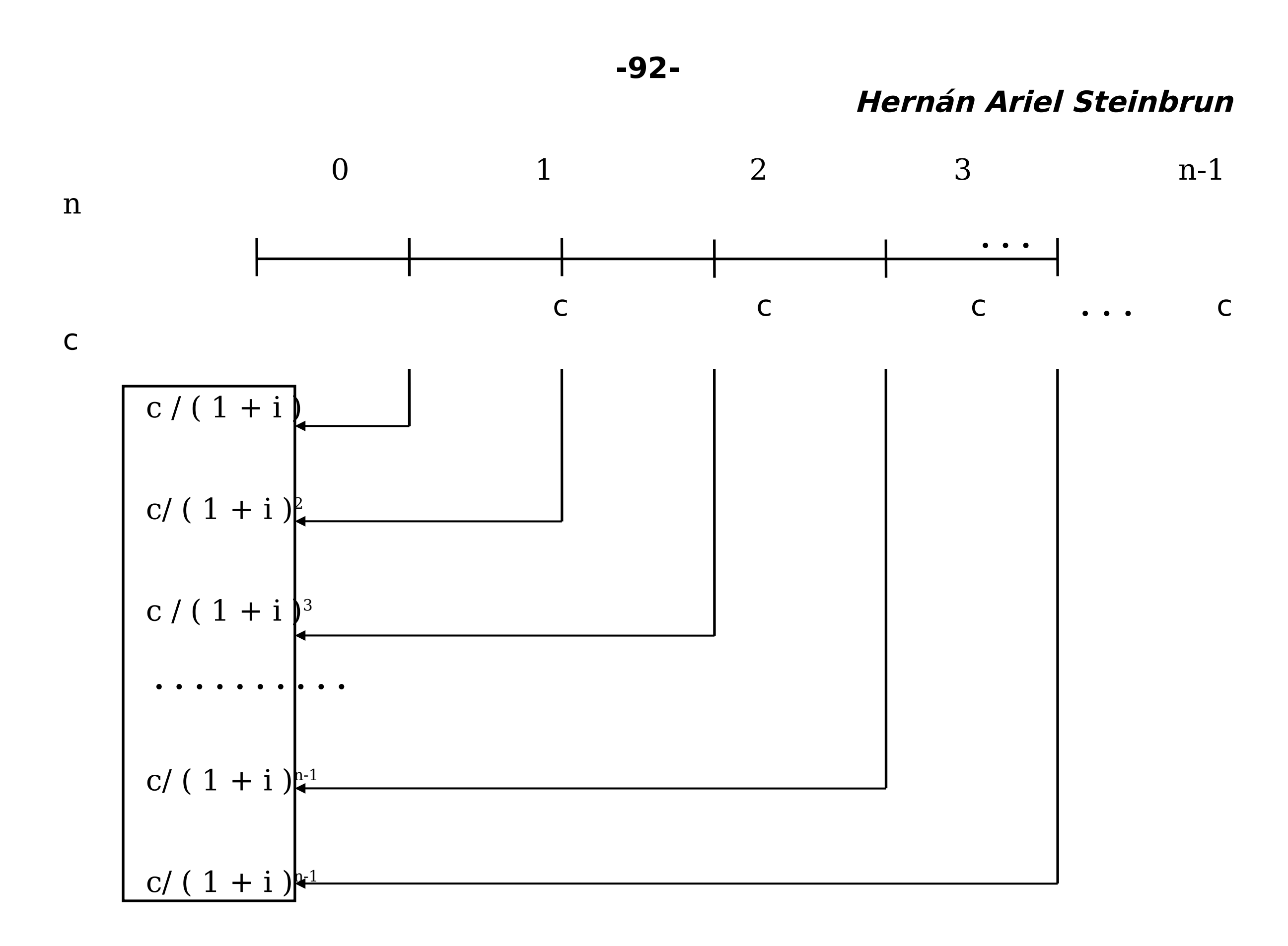
VF (1; 12; 0,003229) = $ 818,64 x 12,2154248 = $ 10.000

CAPITULO 10. VALORES ACTUALES .

El cálculo de los valores actuales se efectúa empleando técnicas similares a las que se utilizaron para determinar los valores finales. La única diferencia que se hallará es que ahora la valuación del flujo de fondos se realiza en el momento presente. La valuación en el momento presente se requiere fundamentalmente en las operaciones de préstamo; cuando uno se financia uno de los temas básicos que le interesan es cuánto va a recibir hoy y a cuánto ascenderá el monto de las cuotas.

10.1. *El Valor Actual de las rentas vencidas.*

Consideremos la valuación en el momento presente, aplicando la tasa i, de n cuotas periódicas, equiespaciadas, abonadas por período vencido. El esquema es el siguiente:



$*$ VA (1; n; i)

Denotamos mediante VA (1; n; i), el valor actual de esas n cuotas abonadas por período vencido cuyas demás características se mencionaron en el párrafo anterior. VA (1; n; i) es simplemente la suma de los valores actuales de esas n cuotas.

La primer cuota, dista un período del origen y vale en este, considerado el momento
presente c / (1+i); la segunda cuota dista dos periodos del origen y vale en éste $c / (1+i)^2$ y así siguiendo con las restantes cuotas. Por lo tanto:

$$VA(1; n; i) = c / (1+i) + c / (1+i)^2 + \dots + c / (1+i)^n$$

O bien, sacando factor común c resulta:

$$VA(1; n; i) = c \left[1 / (1+i) + 1 / (1+i)^2 + \dots + 1 / (1+i)^n \right] \qquad (10.1.1)$$

Los términos del corchete representan una progresión geométrica de razón 1 / (1+i). La aplicación de (9.1.1) para efectuar la suma conduce a:

$$\left[1 / (1+i) + 1 / (1+i)^2 + \dots + 1 / (1+i)^n \right] = 1 / (1+i) \, \frac{1 - 1 / (1+i)^n}{1 - 1 / (1+i)}$$

Si en el segundo miembro se efectúa la resta, tanto en el numerador como en el denominador, resulta:

$$1 / (1+i) \; . \; \frac{\left[(1+i)^n - 1 \right] / (1+i)^n}{(1 + i - 1) / (1+i)}$$

La expresión (1+i) se cancela puesto que figura en el numerador y en el denominador y además 1 + i -1 se reduce a i.

Por consiguiente:

$$\left[1 / (1+i) + 1 / (1+i)^2 + \dots + 1 / (1+i)^n \right] = \frac{(1+i)^n - 1}{i \, (1+i)^n} \qquad (10.1.2)$$

Esta última expresión puede ser denotada mediante a (1; n; i).

Es decir:

$$a\,(1;\,n;\,i) = \frac{(1+i)^{n} - 1}{i\,(1+i)^{n}} \qquad (10.1.3)$$

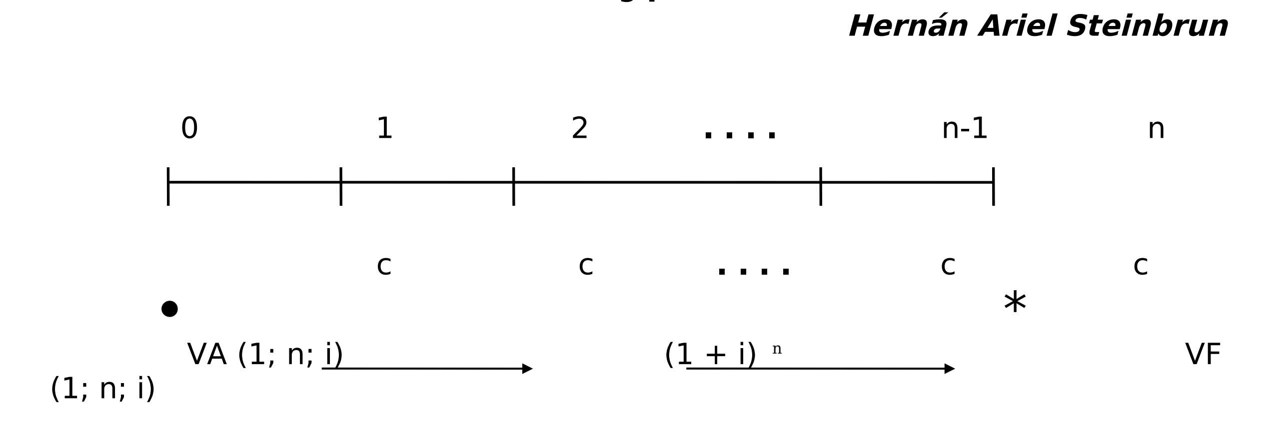
Por lo tanto VA (1; n; i) se puede escribir:

$$VA\,(1;\,n;\,i) = c.\quad a\,(1;\,n;\,i) = c\frac{(1+i)^{n} - 1}{i\,(1+i)^{n}} \qquad (10.1.4)$$

Si en esta última expresión se hace c = 1, se puede apreciar que a (1; n; i) representa el valor actual de n pagos periódicos, unitarios, equiespaciados cronológicamente, abonados por término vencido, valuados (según las reglas del interés compuesto) aplicando la tasa i.

La expresión a (1; n; i) representa un factor de actualización: implica asignarle a las cuotas c el valor que les corresponde en el momento presente. En cierta forma la aplicación de a (1; n; i) puede ser visualizada como la operación que "traslada" todas las cuotas c al origen.

Otra forma alternativa de deducir la fórmula de VA (1; n; i) es a partir de VF (1; n; i). Si se observa el esquema siguiente:



Se comprueba que entre VA (1; n; i) y VF(1; n; i) median n períodos y el factor de capitalización es $(1 + i)^{n}$. Como VF (1; n; i) es el valor que toma VA (1; n; i) si se lo caplitaliza n períodos, es decir, si se lo multiplica por $(1 + i)^{n}$, resulta:

$$VF\,(1;\,n;\,i) = VA\,(1;\,n;\,i)\,(1 + i)^{n},$$

de modo que:

$$\text{VA}\ (1;\ n;\ i) \quad = \quad \text{VF} \quad (1;\ n;\ i)\ \frac{1}{(1+i)^{n}} \qquad (10.1.8)$$

y como $\text{VF}\ (1;\ n;\ i) = c\ \dfrac{(1+i)^{n} - 1}{i}$ (10.1.8) resulta:

$$\text{VA}\ (1;\ n;\ i) = c\ \frac{(1+i)^{n} - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n}} = c\ \frac{(1+i)^{n} - 1}{i\ (1+i)^{n}}$$

Este último procedimiento relaciona los valores actuales y los finales.

Ejemplo 10.1.1

El gobierno del país XX emite el 05/04/96 un bono de $ 100 valor nominal, de acuerdo con las siguientes condiciones:

1) Los intereses serán abonados semestralmente, el 05/04 y el 05/10 de cada año; a partir del 05/10/96;

2) La tasa de interés es el 7% nominal anual;

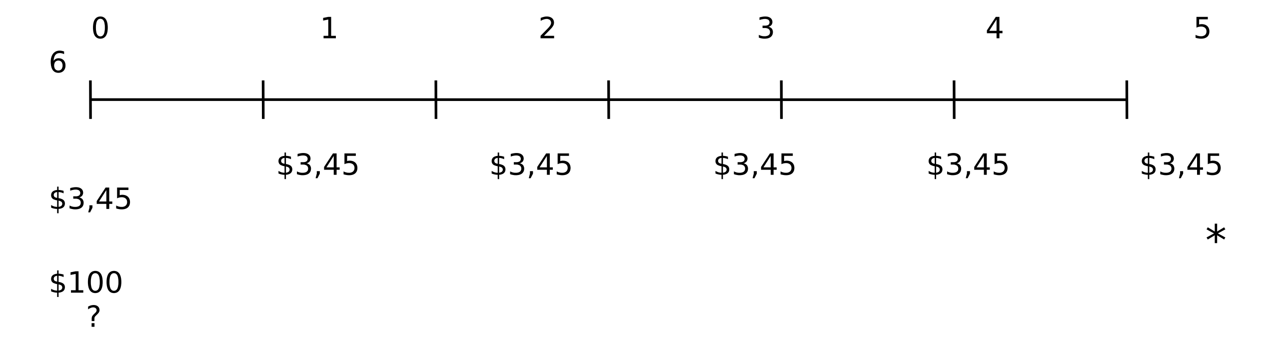
3) El plazo es de 3 años, siendo rescatados a su valor nominal, $ 100, el 05/04/99.

¿Cuánto deberé abonar por el bono el 05/04/96 si deseo obtener un rendimiento del 10% anual?

Si consideramos un año de 365 días la tasa de interés que abona el bono semestralmente es $\dfrac{0{,}07 \times 180}{365} = 0{,}0345205$. Por lo tanto el interés resulta: $100 x 0,0345205= $ 3,45

El flujo de fondos se puede representar mediante el siguiente diagrama:

05/04/96 05/10/96 05/04/97 05/10/97 05/04/98 05/10/98 05/04/99



El precio del bono es el valor presente de los intereses más el valor presente del capital de $ 100. Este valor presente debe ser valuado aplicando la tasa anual efectiva del 10%.
La tasa del 10% efectivo anual expresada en términos semestrales es:

$$(1{,}10)^{180/365} - 1 = 0{,}0481244 \text{ ó } 4{,}81244\%$$

Los intereses, $3,45 abonados cada seis meses, constituyen una cuota periódica, constante, pagadera por término vencido cuyo valor actual está dado por (10.1.4).

Luego:

$$VA\ (1;\ 6;\ 0{,}0481244) = \$\ 3{,}45\ .\ a\ (1;\ 6;\ 0{,}0481244)$$

Como:

$$a\ (1;\ 6;\ 0{,}0481244) = \frac{(1{,}0481244)^6 - 1}{0{,}0481244\ \ (1{,}0481244)^6} = 5{,}1062795$$

Resulta:

$$VA\ (1;\ 6;\ 0{,}0481244) = \$\ 3{,}45 \times 5{,}1062795 = \$\ 17{,}62$$

El valor presente del capital es:

$$\frac{\$\ 100}{(1{,}0481244)^6} = \$\ 100\ .\ 0{,}7542634 = \$\ 75{,}42$$

Estos resultados indican que el valor del bono el 05/04/96 es $ 75,42 + $17,62 = $ 93,04
Este precio me asegura un rendimiento del 10% anual.

10. 2. ***Cuotas relativas a los valores actuales.***

En este punto calcularemos la cuota periódica c, equiespaciada cronológicamente, que abonada por término vencido y valuada al inicio de la operación mediante la aplicación de la tasa i, genera un valor actual, digamos VA (1; n; i). El mismo gráfico que sirvió para apreciar esquemáticamente el significado de VA (1; n; i) sirve también para visualizar las relaciones que este valor presente tiene con c.

La fórmula relativa a VA (1; n; i) se deduce inmediatamente de (10.1.4). En efecto de:

$$VA\ (1; n; i) = c \ . \ a\ (1; n; i) \quad \text{en la que:}$$

$$a\ (1; n; i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i\ (1+i)^n} = \frac{1 - v^n}{i}$$

se obtiene:

$$c = VA\ (1; n; i) \ . \ a^{-1}\ (1; n; i) \qquad (10.2.1)$$

donde:

$$a^{-1}\ (1; n; i) = \frac{i\ (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{i}{1 - v^n} \qquad (10.2.2)$$

El significado de a^{-1} (1; n; i) se puede obtener haciendo VA (1; n; i) = 1 en (10.2.1). Entonces, podemos comprobar que a^{-1} (1; n; i) es la cuota periódica, equiespaciada cronológicamente, que valuada en el origen de la operación mediante la aplicación de la tasa i, según las reglas del interés compuesto, constituye un valor actual de 1. El esquema gráfico es el siguiente:

0 1 2 n-1 n

a^{-1} (1; n; i) a^{-1} (1; n; i) a^{-1} (1; n; i) a^{-1} (1; n; i)

*

1

Ejemplo 10.2.1

El 05/04/96 me otorgan un préstamo de $ 10.000 que será devuelto en 12 cuotas mensuales, iguales y consecutivas, la primera de las cuales es abonada el 05/05/96. Determinar el valor de las cuotas (aplicando las reglas del interés compuesto) si la tasa es el 16% nominal anual.

$j_{(30)}$ x 30 0,16 x 30

La tasa mensual resulta: $\frac{\quad}{365} = \frac{\quad}{365}$ = 0,01315068 ó 1,315068% mensual

Entonces, si para calcular la cuota se aplica (10.4.1) y (10.4.2) se obtiene:

$$c = \$\ 10.000 \quad a^{-1}\ (1;\ 12;\ 0{,}01315068)$$

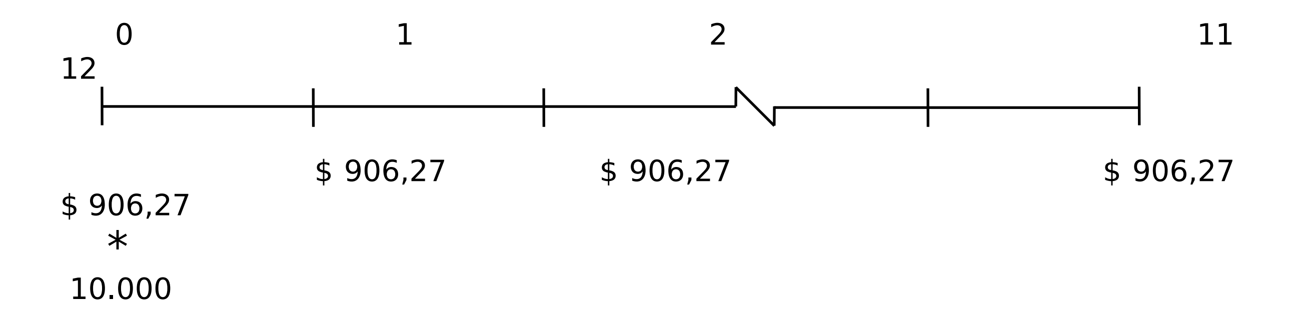
donde:

$$a^{-1}\ (1;\ 12;\ 0{,}01315068) = \frac{0{,}01315068 \ . \ (1{,}01315068)^{12}}{(1{,}01315068)^{12} - 1} = 0{,}09062717$$

De modo que:

$$c = \$\ 10.000 \quad x\ 0{,}09062717 = \$\ 906{,}27$$

Gráficamente:



El lector puede verificar que el valor actual de 12 pagos de $ 906,27 cada uno, en las condiciones enunciadas constituyen un valor actual de $ 10.000 haciendo:

$$VA\ (1;\ 12;\ 0{,}01315068) = \$\ 906{,}27\ .\ a\ (1;\ 12;\ 0{,}01315068)$$

Si VA (1; n; i) representa un préstamo, entonces la cuota calculada mediante (10.4.1):

$$c = VA\ (1;\ n;\ i) \quad a^{-1}\ (1;\ n;\ i)$$

es la cuota que corresponde a un sistema de préstamos denominado francés. Veremos que esta cuota se puede dividir en dos partes: una de las cuales se denomina amortización del capital y es la parte de la cuota que tiene por

finalidad reconstituir el monto prestado y la otra es el interés, que es percibido por los servicios que se derivan del uso del capital.

CAPÍTULO 11. PRÉSTAMOS.

La característica principal de las operaciones de préstamos financieros es el intercambio entre dos partes contratantes de sumas de dinero o valores en distintos momentos del tiempo. Una de esas partes, el prestamista o acreedor, cede en el momento presente a la otra, el prestatario o deudor, una suma de dinero (si se trata de un préstamo monetario) con la obligación para este último de que la restituya en un momento futuro ya sea de una sola vez o bien en forma fraccionada, mediante el pago de cuotas.

Este intercambio se sustancia por lo general, mediante un contrato en el que se estipulan los derechos y las obligaciones de cada parte y en tanto que el compromiso del acreedor es inmediato, el del deudor es mediato debiendo devolver la suma prestada con más los respectivos intereses por el uso del capital. La forma de devolución de los préstamos es bastante variada, pero pueden distinguirse tres usos principales:

a) mediante un pago único de capital e intereses al finalizar el plazo; b) mediante el pago periódico de intereses y la devolución del capital al final o c) mediante el pago de cuotas que incluyen capital e interés. Esta última forma asimila los préstamos a las rentas.

Ahora bien, independientemente de la forma que revista la devolución de un préstamo siempre debe existir un equilibrio financiero entre los compromisos de ambas partes. Este se logra igualando ambos compromisos en un mismo momento y la práctica financiera utiliza casi exclusivamente el momento en que se entrega el préstamo. De esta manera, el compromiso del acreedor es la suma que presta; el del deudor consistirá en que el valor actual de sus obligaciones futuras deberá ser igual al monto que recibe en calidad de préstamo.

Para efectuar el cálculo de las obligaciones futuras se requiere conocer el monto del préstamo y la fecha en que se abona, los pagos que deberá efectuar el deudor, su número, cuantía y la fecha en que se efectuarán, la tasa de interés estipulada, si hay pagos extraordinarios y cualquier otro dato que resulte pertinente para determinar el flujo de fondos de la operación. Esa

información permitirá también calcular la denominada tasa interna de retorno o de rentabilidad, que no es más que la tasa efectiva de la operación.
El conocimiento de esta tasa permitirá determinar si se trata de una operación transparente o no. Este último caso es cuando la tasa de interés aplicada no coincide con la tasa contractual pactada en la operación.

La forma de efectuar estos cálculos diferirá según las distintas modalidades de devolución de los préstamos que hemos enunciado más arriba, este hecho motiva que las fórmulas que resuelven esos cálculos deban ser analizadas separadamente, incluyéndose en este análisis los sistemas más utilizados: francés, alemán, directo o aquellos en los que las cuotas varían según una progresión aritmética o geométrica.
Otro tema importante que será tratado en conexión con los préstamos son las cláusulas de rescisión; en cada caso ellas serán consideradas específicamente y se enunciarán las condiciones que posibilitan la rescisión de los contratos sin que se rompa el equilibrio financiero entre las partes.

Cuando el préstamo es abonado en cuotas estas se componen de dos partes: una de ellas es el interés, que es la suma de dinero incluida en la cuota que se debe entregar por el uso del préstamo, y la otra, la amortización del capital, que es la suma de dinero, también incluida en la cuota, que está destinada a reconstituir el monto del préstamo. La suma de las amortizaciones representa el total amortizado y si esta cantidad se deduce del monto prestado se obtiene el saldo del préstamo, aspecto estrechamente vinculado con la rescisión del contrato. Estos elementos serán analizados individualmente en cada préstamo que consideremos.

Por último, señalamos que una condición necesaria para que un préstamo en cuotas pueda ser saldado es que la cuota respectiva sea superior al interés, de modo que ese exceso o remanente pueda ser destinado a la reconstitución del préstamo bajo la forma de amortización del capital.

Se introducirá brevemente una simbología para facilitar el tratamiento de los préstamos.

S_k : Saldo del préstamo en el período k, antes de abonar la k-ésima cuota;

S_0: Saldo inicial del préstamo; monto prestado. Como consideramos pagos vencidos y como al inicio del primer período no se abonó ninguna cuota resulta

$S_0=S_1$.

En lo que sigue se utilizará indistintamente S_0 o S_1 para denotar al saldo inicial;

c_k: Valor de la k-ésima cuota;

t_k : amortización incluida en la k-ésima cuota;

I_k : interés incluido en la k-ésima cuota;

T_k: total amortizado, incluyendo la k-ésima amortización.

11.1. ***Sistema francés.***

El denominado sistema francés de préstamos se caracteriza por el pago de una cuota constante e igual a $S_0 \cdot a^{-1}(1; n; i)$, porque en la valuación se emplean las reglas del interés compuesto y como hemos demostrado en el capítulo sobre rentas, este régimen de valuación conduce a que la cuota se calcule en la forma indicada.

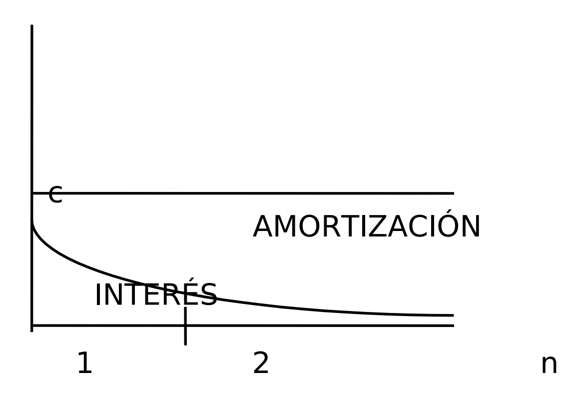
El sistema francés además de poseer una cuota constante calculada de la manera indicada mediante el empleo de las reglas del interés compuesto, presenta otros aspectos relevantes como por ejemplo, el hecho de que las sucesivas amortizaciones son deducidas de los respectivos saldos de deuda, de manera que los intereses contenidos en cada cuota se calculan sobre los nuevos saldos de deuda, vigentes en ese período. Vamos a demostrar esta afirmación mediante un razonamiento heurístico.

Como hemos mostrado en el punto 10.6, $a^{-1}(1; n; i)$ se puede descomponer en dos partes: la suma de $s^{-1}(1; n; i)$ más i. Así que $S_0 \cdot s^{-1}(1; n; i)$, es la parte de la primer

cuota tendiente a reconstituir el capital y $S_0 \cdot i$ es la parte de interés de la primer cuota. Se ve que en la primer cuota la tasa de interés se aplica sobre el saldo de deuda que en este caso es S_0.
El saldo siguiente, S_2 resulta de deducir la amortización al saldo inicial S_0 (o S_1 ya que hemos estipulado que $S_0 = S_1$) y este nuevo saldo puede interpretarse como un préstamo cuya vigencia es la de un período menos que la del préstamo inicial. Por lo tanto, como la cuota es idéntica a la anterior, resultará de aplicar las reglas del interés compuesto y entonces será: $S_2 \cdot a^{-1}(1; n - 1; i)$. También esta nueva cuota se puede descomponer en amortización del capital e interés y de acuerdo con lo que hemos establecido en 10. 6. 1 es $a^{-1}(1; n - 1; i) = s^{-1}(1; n - 1; i) + i$, así que la parte de interés de la segunda cuota será: $S_2 \cdot i$. Entonces, el interés de la segunda cuota también se calcula aplicando la tasa al saldo de deuda, S_2. Este razonamiento puede extenderse a las restantes cuotas y pone de manifiesto que el interés contenido en cada cuota se calcula aplicando la tasa al saldo de la deuda vigente en el momento del pago.

Como la cuota es constante, el interés incluido en cada cuota, abonado sobre saldos de duda, será decreciente y, por lo tanto, la amortización será creciente,

de modo que este sistema puede ser caracterizado también como de amortización progresiva con cuota constante.
En forma gráfica:



A medida que se van abonando cuotas, la parte de interés de cada cuota disminuye y aumenta la parte de amortización.

A continuación se calcularán, las fórmulas de los componentes del sistema aplicándose los resultados obtenidos en el capítulo sobre rentas.

Cuota

La cuota es constante; es decir $c_k = c$. Las reglas del interés compuesto permiten calcular el valor actual de las cuotas mediante: VA (1; n; i) = c . a (1; n; i) y para que exista equilibrio financiero ese valor actual I de las cuotas debe ser igual al monto prestado S_0, así que resulta:

$c \ . \ a\ (1; n; i) \ = \ S_0$ o bien $c \ = \ S_0 \, a^{-1} (1; n; i)$

De modo que:

$$c = S_0 \frac{i \ (1 + i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Interés

El interés contenido en cada cuota se calcula sobre saldos de deuda. Así:

$$I_k = i \ . \ S_k$$

Amortización

Teniendo en cuenta que: i) $c = a^{-1} (1; n; i)$ y que ii) $a^{-1} (1; n; i) = s^{-1} (1; n; i) + i$, se deduce que:

$$c = S_0 [\, i + s^{-1} (1; n; i) \,] = S_0 \, . \, i + S_0 \, . \, s^{-1} (1; n; i)$$

Como $S_0 . i = S_1 . i$ es el interés de la primer cuota resulta que $S_0 . s^{-1} (1; n; i)$ constituye la amortización incluida en la primer cuota.

Es decir:

$$t_1 = S_0 . s^{-1} (1; n; i)$$

$$t_1 = S_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Se puede demostrar que $t_k = t_1 (1 + i)^{k-1}$; esto es, la k-ésima amortización es igual a la primera capitalizada (a interés compuesto) durante k -1 períodos. La demostración se presenta en el Apéndice 1 de este capítulo.

<u>Total amortizado</u>

El total amortizado, justo en el momento que se abona la k-ésima cuota, es igual a la suma de las amortizaciones efectuadas hasta ese momento. En símbolos:

$$T_k = t_1 + t_2 + . . . + t_k$$

Es fácil comprobar que : $T_k = t_1 \; s (1; n; i)$

Esto significa que el destino de las amortizaciones es reconstituir la cuantía del capital prestado y que el interés contenido en la cuota es el pago que se efectúa por el uso del capital.

<u>Saldo del préstamo</u>

El saldo del préstamo, exactamente en el momento que se ha abonado la k-ésima cuota, es:

$$S_{k+1} = S_0 - T_k$$

También puede calcularse como el valor actual de las cuotas que aún faltan pagar, es decir:

$$S_{k+1} = c . a (1; n - k; i)$$

Podemos anticipar que el sistema francés es un sistema transparente: la tasa de interés contractualmente pactada coincide con la tasa efectiva de la operación. La demostración de esta afirmación será pospuesta hasta que se estudie la tasa interna de retorno.

<u>Ejemplo 11.1</u>

El 05/03/96 se prestan $ 10.000 a seis meses de plazo mediante el sistema francés. El préstamo será devuelto en seis cuotas mensuales, iguales y consecutivas, la primera de las cuales se abona el 05/04/96 e incluyen el 0,8% mensual de interés.

Se desea conocer: a) el desarrollo del préstamo y b) Calcular t_4 y S_5

a) Desarrollo del préstamo:

$S_0 = \$ \ 10.000 \qquad i = 0,008 \qquad n = 6$

$$c = \$ \ 10.000 \ \frac{0,008 \ (1,008)^6}{(1,008)^6 - 1} = \$ \ 1.713,64$$

$$t_1 = \$ \ 10.000 \ \frac{0,008}{(1,008)^6 - 1} = \$ \ 1.633,64$$

$I_1 = \$ \ 10.000 \ . \ 0,008 = \$ \ 80$

Fecha	**Cuota número.**	**Saldo**	**Interés**	**Amortización**	**Cuota**	**Total Amortizado**
05/03/96	0	10.000.--	-.-	-.-	-.-	-.-
05/04/96	1	10.000.--	80,00	1.633,64	1.713,64	1.633,64
05/05/96	2	8.366,36	66,93	1.646,71	1.713,64	3.280,35
05/06/96	3	6.719,65	53,76	1.659,88	1.713,64	4.940,24
05/07/96	4	5.059,76	40,48	1.673,16	1.713,64	6.613,41
05/08/96	5	3.386,59	27,09	1.686,55	1.713,64	8.299,96
05/09/96	6	1.700,04	13,60	1.700,04	1.713,64	10.000.--

11.2. ***Sistema alemán***

El sistema alemán de préstamos se caracteriza porque el interés se abona sobre saldos de capital adeudados y porque la amortización es una alícuota (constante) del monto prestado.

Las fórmulas de cálculo de los elementos que forman parte de este sistema son muy fáciles de deducir.

Amortización

La amortización es constante y resulta de dividir el saldo inicial por el número de períodos. Así: $t_k = S_0 / n$. Ni S_0 ni n dependen de k, de modo que t_k es constante.

Total amortizado

$$T_k = t_1 + t_2 + ... + t_k = k \cdot t_1,$$

Ya que :

$$t_1 = t_2 = ... = t_k$$

También se verifica que:

$$T_n = n\ t_1 = n \cdot \frac{S_0}{n} = S_0$$

La suma de las amortizaciones es igual al monto prestado.

Saldo de deuda

$$S_k = S_0 - T_{k-1}$$

Interés

Se calcula sobre saldos de deuda. Por lo tanto: $I_k = i \cdot S_k$.

En la última expresión se aplicó la fórmula obtenida para S_k.
Es sencillo comprobar que la diferencia entre los intereses contenidos en dos cuotas consecutivas es: $i \cdot S_0 / n$.
Esta fórmula puede ser explicada heurísticamente como sigue: la diferencia entre dos

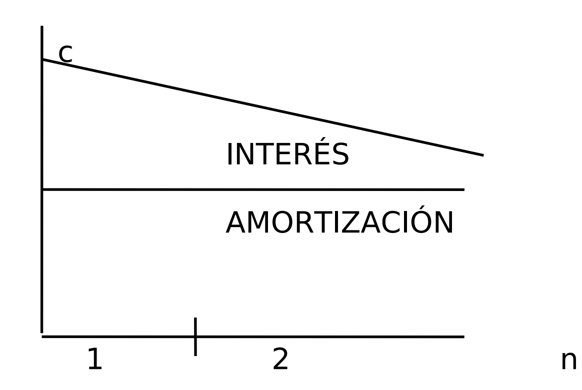
saldos consecutivos es la amortización de capital, esto es: $t_1 = S_0 / n$ y como la cuota se calcula sobre saldos de capital, el interés de la nueva cuota aparecerá disminuido entonces en una cantidad $i \cdot t_1 = i \cdot S_0 / n$.

Cuota

La cuota está compuesta por amortización del capital e interés. Así que: $c_k = t_k + I_k$
y como la amortización, t_k, es constante y la tasa de interés se aplica sobre saldos de capital, es decir: $I_k = i \cdot S_k$ se puede escribir: $c_k = t_k + i \cdot S_k$

También, como la amortización es constante y el interés es decreciente en una magnitud igual a $i \; . \; S_0 / n$ resultará que la cuota, que es la suma de esos dos componentes, también será decreciente en esa misma magnitud.

En forma gráfica:



Se puede demostrar que el sistema alemán también puede ser valuado aplicando las reglas del interés compuesto: es un caso particular de una renta cuyas cuotas varían según una progresión aritmética. La magnitud del decrecimiento es $i \; . \; S_0 / n$.

El hecho de que sea un sistema derivado de las reglas del interés compuesto será útil para evaluar la transparencia del régimen, de acuerdo al sentido que le hemos asignado a la noción de transparencia.

Más adelante, una vez que se haya estudiado la tasa interna de rentabilidad de un flujo de fondos, se establecerán las condiciones mediante las cuales se podrá discernir si los sistemas de préstamos son transparentes o no; pero adelantemos ahora que el denominado sistema alemán de préstamos cumple con esas condiciones y, por lo tanto, la tasa contractualmente pactada coincide con la tasa efectiva de la operación.

Ejemplo

El 05/03/96 se prestan \$ 10.000 a seis meses de plazo mediante el sistema alemán. El préstamo será devuelto en seis cuotas mensuales consecutivas, la primera de las cuales se abona el 05/04/96 e incluyen el 0,8% mensual de interés. Se desea conocer el desarrollo del préstamo.

$S_0 = \$ 10.000 \qquad n = 6 \quad i = 0,008$

$t_1 = \frac{\$ 10.000}{} = 1.666,67 \qquad I_1 = \$ \; 10.000 \; . \; 0,008 = \$$ 80.

6

Fecha	Cuota número.	Saldo	Interés	Amortización	Cuota	Total Amortizado
05/03/96	0	10.000.--	-.-	-.-	-.-	-.-
05/04/96	1	10.000.--	80,00	1.666,67	1.746,67	1.666,67
05/05/96	2	8.333,33	66,67	1.666,67	1.733,34	3.333,34
05/06/96	3	6.666,66	53,33	1.666,67	1.720,00	5.000,00
05/07/96	4	5.000,00	40,00	1.666,67	1.706,67	6.666,67
05/08/96	5	3.333,33	26,67	1.666,67	1.693,33	8.333,33
05/09/96	6	1.666,67	13,33	1.666,67	1.680,00	10.000.--

Se puede comprobar que los intereses y las cuotas decrecen en $ 13,33 magnitud idéntica a:

$$\frac{i \, . \, S_0}{n} = \frac{0{,}008 \, . \, 10.000}{6}$$

14.5 ***Comparación entre los sistemas francés y alemán***.

Tanto en el sistema francés como en el alemán, los cálculos se pueden efectuar empleando las reglas del interés compuesto; los intereses se calculan sobre saldos de capital y la suma de las amortizaciones es igual al capital prestado. La tasa efectiva de la operación de préstamos coincide, en ambos sistemas, con la tasa contractualmente pactada, de manera que desde el punto de vista financiero no hay diferencias entre ellos puesto que producen el mismo rendimiento. Esto significa que si se aplica la misma tasa de interés cada sistema produce idéntica rentabilidad y por lo tanto financieramente son equivalentes.
Sin embargo, no son idénticas ni la evolución de las cuotas ni la generación de intereses, de allí que por problemas de liquidez o por problemas impositivos o contables un sistema pueda ser preferido al otro.

Las cuotas del sistema francés que son constantes, al principio son menores que las del alemán, pero luego son superiores a las de este; en el momento en que son iguales, considerando un capital prestado de un peso, se debe verificar que:

Se deduce inmediatamente que, dado que ni las cuotas ni los intereses son iguales, tampoco serán iguales ni las amortizaciones ni el total amortizado como se mostrara en los párrafos precedentes. Sin embargo, ambos sistemas son financieramente equivalentes, puesto que las respectivas cuotas producen el mismo rendimiento y determinan, por consiguiente, una tasa de retorno idéntica e idéntica a su vez, a la tasa contractual pactada en la operación.

11.3. ***Sistema directo.***

Con este nombre se individualiza al sistema de préstamos en el que la amortización es una alícuota del monto del préstamo (como en el sistema alemán) y en el que el interés contenido en cada cuota se calcula siempre sobre el saldo original de la deuda.

En símbolos:

$$t_k = \frac{S_0}{n} \qquad ; \quad I_k = i \, . \, S_0$$

Estas expresiones son independientes de k, de modo que son constantes; por lo tanto, la cuota, que es la suma de ellas, también será constante. Puede escribirse:

$$c = \frac{S_0}{n} + i \, . \, S_0$$

Sacando el factor común S_0, se tiene:

$$c = S_0 \left[\frac{1}{n} + i \right] \qquad (11.3.1)$$

Esta última fórmula pone de manifiesto que en este sistema de préstamos se aplican las reglas del interés simple y el interés no se calcula sobre saldos de deuda sino sobre el capital inicial.
Mediante un razonamiento heurístico se pondrá de manifiesto que el rendimiento en este sistema será superior al del sistema francés. Dado que este constituye un modelo de operación transparente, el sistema directo no revestirá tal carácter y se comprobará que la tasa efectiva de la operación será superior a la pactada contractualmente en el préstamo.
La conclusión se obtendrá elípticamente, comparando el sistema directo con el alemán, en virtud de que por lo expuesto en el punto 14.3, este sistema es financieramente

equivalente al francés y por lo tanto, en este razonamiento, lo puede sustituir perfectamente.

El sistema directo incluye en cada cuota la misma cantidad de amortización que el sistema alemán y el interés contenido en la primer cuota es idéntico en ambos sistemas. Las cuotas siguientes se diferencian en que el interés incorporado en cada una de ellas es decreciente en el alemán, puesto que se calcula sobre saldos de capital adeudados y constante en el directo, ya que se calcula sobre el saldo inicial del préstamo. Se deduce así que la masa de intereses incluida en cada cuota, excepto la primera, es mayor en el directo que en el alemán y de aquí que las cuotas del directo -excepto la primera- sean superiores a las del otro sistema. Como el sistema alemán de préstamos tiene el mismo rendimiento que el sistema francés se concluye que el sistema directo debe tener un rendimiento mayor y no se trata de una operación transparente. Aún más, como los sistemas francés y directo poseen cuotas constantes y el rendimiento en el directo es mayor, en este último sistema la cuota abonada es de mayor cuantía. Se deja al lector efectuar la demostración y el Apéndice 4 a este capítulo puede constituir una ayuda. De todos modos, en el ejemplo que se consigna a continuación se pone de manifiesto esta apreciación.

Ejemplo

El 05/03/96 se prestan $ 10.000 a seis meses de plazo mediante el sistema directo. El préstamo será devuelto en seis cuotas mensuales, iguales y consecutivas, la primera de las cuales se abona el 05/04/96 e incluyen el 0,8% mensual de interés. Se desea conocer el desarrollo del préstamo.
La amortización t_k, que es es constante se puede calcular mediante t_k= $ 10.000 / 6 = $1.666,67.
El interés (que también es constante) asciende a:

$$I_k = i \cdot S_0 = 0{,}008 \cdot \$\ 10.000 = \$\ 80$$

$$c = \$\ 1.666{,}67 + \$\ 80 = \$\ 1.746{,}67$$

Fecha	Cuota número.	Saldo	Interés	Amortización	Cuota	Total Amortizado
05/03/96	0	10.000.--	-.-	-.-	-.-	-.-
05/04/96	1	10.000.--	80,00	1.666,67	1.746,67	1.666,67
05/05/96	2	8.333,33	80,00	1.666,67	1.746,67	3.333,34
05/06/96	3	6.666,66	80,00	1.666,67	1.746,67	5.000,00
05/07/96	4	5.000,00	80,00	1.666,67	1.746,67	6.666,67
05/08/96	5	3.333,33	80,00	1.666,67	1.746,67	8.333,33
05/09/96	6	1.666,67	80,00	1.666,67	1.746,67	10.000.--

El lector puede observar que las cuotas son superiores a las del correspondiente sistema francés y que la primer cuota coincide con la del sistema alemán.
Este sistema, bastante difundido en la práctica debido en parte, a su simplicidad, presenta características arbitrarias puesto que los intereses son

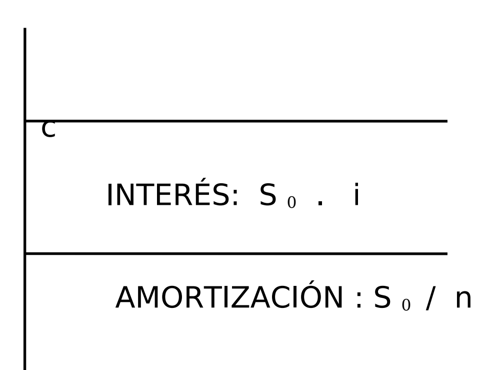
calculados sobre el saldo original del préstamo. Este hecho determina que el interés no se determine según los capitales

efectivamente prestados y por el tiempo que están a disposición del deudor. En el ejemplo precedente, los $ 10.000 que integran el préstamo, están a disposición del prestatario desde el 05/03/96 hasta el 05/04/96; a partir de esta fecha como el deudor devolvió $ 1.666,67 en concepto de amortización, la suma efectivamente prestada es $8.333,33; sin embargo la segunda cuota incluye un cargo por intereses de $ 80 que corresponde a la aplicación de la tasa al monto original del préstamo. Este procedimiento puede ser calificado como una práctica financiera arbitraria, a pesar de lo cual este sistema posee extensa difusión en nuestra práctica comercial.

Más adelante, cuando consideremos la tasa interna de rentabilidad, puntualizaremos que el empleo del sistema directo implica promocionar una tasa de interés que es inferior a la tasa que se aplica efectivamente en la operación de préstamo, de manera que la publicidad presenta una información engañosa a los potenciales clientes carentes de conocimientos financieros especializados.

La rescisión del contrato se puede efectuar de manera similar a la ya vista cuando se analizó el sistema alemán y el sistema alemán promedio de modo que no insistiremos sobre esto. Sin embargo, el saldo de deuda puede ejercer un rol ambiguo. Supongamos, considerando el ejemplo precedente, que se conviene que a partir de la cuarta cuota la tasa de interés pasa a ser del 1% mensual. Si esta tasa se aplicara sobre el saldo de deuda, que en ese momento es $ 5.000, el interés incluido en la cuota ascendería a $ 50, lo que resultaría paradójico; si se aplicara sobre el capital inicial, los intereses ascenderían a $ 100, pero en este caso no se tendría en cuenta el saldo de deuda. De allí la ambigüedad acerca del rol que cumplen las amortizaciones en el sistema directo. A modo de síntesis, podemos afirmar que estas contradicciones se originan por el empleo de las reglas del interés simple para el cálculo de los componentes del préstamo, que induce rendimientos decrecientes para el deudor.

En forma gráfica la cuota de este sistema se puede esquematizar de la siguiente manera:



0 n